Exponentielles de diverses bases.

La suite géométrique $(e^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la restriction à $\mathbb{N}$ de la fonction exponentielle. Il paraît assez naturel d'essayer de prolonger d'autres suites géométriques, $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(\pi^n)_{n\in\mathbb{N}}$, en des fonctions. L'idée qui permet de comprendre la définition repose sur la rétro-ingénierie. On souhaite avoir une fonction de formule algébrique 2^x or, si cela avait un sens alors on aurait : $2^x = \exp \circ \ln(2^x) = e^{x\ln(2)}$.

Définition 1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle *exponentielle de base a* la fonction qui à tout réel x associe le nombre réel $a^x := e^{x\ln(a)}$.

Remarques.

1. Cette définition ne permet pas de définir une fonction exponentielle de base un nombre négatif. On pouvait prévoir qu'une telle définition serait plus compliquée puisque les suites géométrique de raison négative change de signe entre chaque terme.
2. On dit que a^x est une *puissance du réel a strictement positif* (même si en toute rigueur cela ne correspond pas à la définition de la puissance vue depuis le collège).

Exemples.

1. Exponentielle de base 10.

Proposition 1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a^x > 0$.

Démonstration. Conséquence de la propriété semblable de la fonction exponentielle.

On retrouve des propriétés algébriques comme pour l'exponentielle.

Proposition 2. Soient $(a,b)\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. $a^x a^y = a^{x+y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $(ab)^x = a^x b^x$, $\frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

Proposition 3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe un unique réel strictement positif dont la puissance n-ième égale a. ce réel est $a^{\frac{1}{n}}$. on le note aussi $\sqrt[n]{a}$ et on l'appelle *la racine n-ième de a*.

Démonstration. $x^n = a \iff x = a^{\frac{1}{n}}$.

Proposition 4. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. La fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \ln(a)a^x$.

Proposition 5. Si $a = 1$ alors $x \mapsto a^x$ est constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$. Si $a > 1$ alors $x \mapsto a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Si $a < 1$ alors $x \mapsto a^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exemples.

1. $x \mapsto 5^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. $x \mapsto \left(\frac{2}{7}\right)^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Proposition 6. Si $a > 1$ alors $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$.

Si $0 < a < 1$ alors $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.

Exemples.

1.

   Différents exemples de courbes représentatives de fonctions exponentielles.

Proposition 7. Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $a > 1$ alors, pour tout entier naturel n non nul, $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{-\infty} x^n a^x = 0$. Si $0 < a < 1$ alors, pour tout entier naturel n non nul, $\lim_{x\to+\infty} x^n a^x = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{a^x}{x^n} = \pm\infty$ suivant la parité de n.