Équipotence.

Définition 1. E et F, des ensembles, on dit que *E et F sont équipotents* si et seulement si il existe une bijection de E sur F.

Exemples.

1. $f : \{1;2\} \to \{2;4\}$ définie par $f(1) = 3$ et $f(2) = 4$ est une bijection donc $\{1;2\}$ et $\{2;4\}$ sont équipotents.
2. L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^* \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}\right.$ (opérateur de décalage) est une bijection donc $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ sont équipotents.

Proposition 1. La relation « être équipotent à » est une relation d'équivalence entre ensembles.

Démonstration. Les trois propriétés d'une relation d'équivalence sont vérifiées.

* Id_E est une bijection donc E est équipotent à E donc la relation réflexive.
* Si $f : E \to F$ est une bijection alors $f^{-1} : F \to E$ est aussi une bijection donc la relation est symétrique.
* Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des bijections alors $g \circ f : E \to G$ est aussi une bijection donc la relation est transitive.

Cependant, en toute rigueur, une relation binaire est une partie d'un produit cartésien $X \times X$ où X est un ensemble. Ceci supposerait que X soit l'ensemble de tous les ensembles (paradoxe de Russell) ce qui est impossible dans l'axiomatique ZFC mais est en fait possible dans la théorie des classes (axiomatique von Neumann-Bernays-Gödel).

Remarques.

1. Lorsque deux ensembles E et F sont équipotents nous noterons $E \simeq F$.