Bijection.

I Définitions.

1 Application.

Définition 1

Soient :

. E et F des ensembles,

. $f : E \to F$ une fonction.

Nous dirons que f est une application *application* si et seulement si son ensemble de départ, E, est son domaine de définition, $\mathscr{D}_f$.

2 Injectivité, surjectivité et bijection.

Définition 2

Soient :

. E et F des ensembles,

. $f : E \to F$ une application.

Nous dirons f est *injective* si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2, \ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Nous dirons que f est *surjective* si et seulement si :

$$\forall y \in F, \ \exists x \in E, \ f(x) = y.$$

Nous dirons que f est *bijective* si et seulement si f est injective et surjective.

Proposition 1

Soient :

. E et F des ensembles,

. $f : E \to F$ une application.

f est bijective si et seulement si : $\forall y \in F$, $\exists! x \in E$, $f(x) = y$.

Proposition 2

Si f est strictement monotone alors f est injective.

II Démontrer qu'une application est une bijection avec le théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 1 - de la bijection.

Soient :

. E et F des parties de $\mathbb{R}$,

. $f : E \to F$ une application,

. I un intervalle de E.

Si f est continue et strictement monotone sur I alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

III Fonction réciproque.

1 Définition.

Théorème 2 et définition.

Soient :

. E et F des parties de $\mathbb{R}$,

. $f : E \to F$ une application.

f est une bijection si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que :

$$g \circ f = Id_E \text{ et } f \circ g = Id_F.$$

Dans ce cas g est appelée une *application réciproque de f* (ou une bijection réciproque de f).

Proposition 3

Soient :

. E et F des parties de $\mathbb{R}$,

. $f : E \to F$ une application bijective.

f admet une unique fonction réciproque.

Proposition 4

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

2 Aspect géométrique.

Proposition 5

Soient :

. E et F des parties de $\mathbb{R}$,

. $f : E \to F$ une application,

. $g : E \to F$ une application,

. $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les graphes respectivement de f et g dans un repère orthonormé.

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$) si et seulement si f et g sont réciproques l'une de l'autre.

3 Fonction réciproque et dérivation.

Proposition 6

Soient :

. I et J des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$,

. $a \in I$,

. $f : I \to J$ une application bijective strictement monotone.

Si f est dérivable en a et et $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

IV Exercices.