Bijection.

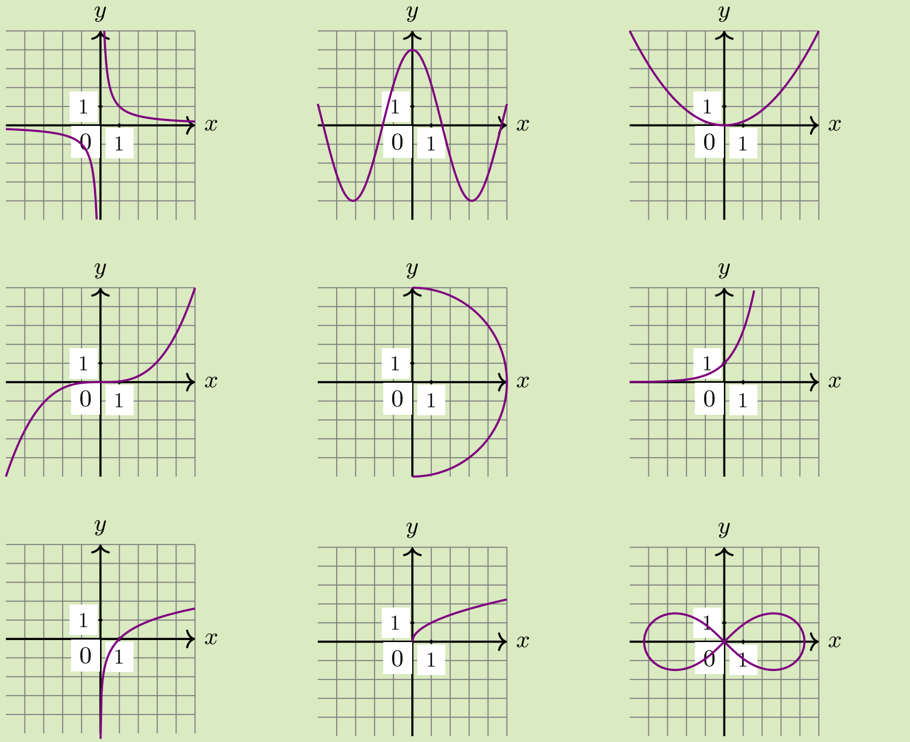
I Définitions.

1 Application.

2 Injectivité, surjectivité et bijection.

Exercice 1.

Dites d'après le graphe si les fonctions sont injectives, surjectives, bijectives ou autre.



II Démontrer qu'une application est une bijection avec le théorème des valeurs intermédiaires.

III Fonction réciproque.

1 Définition.

2 Aspect géométrique.

3 Fonction réciproque et dérivation.

IV Exercices.

Exercice 2.

Indiquez si les fonctions suivantes admettent une fonction réciproque. Dans l'affirmative, précisez cette fonction.

1. Ensemble de départ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ensemble d'arrivée $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. $f(x) = \frac{1}{x}$.
2. Ensemble de départ $\mathbb{R}$. Ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$. $f(x) = 2 - x^2$.
3. Ensemble de départ $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$. Ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$. $f(x) = \frac{x+2}{2x-3}$.
4. Ensemble de départ $\mathbb{R}_+$. Ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$. $f(x) = \sqrt{x}$.

Exercice 3.

Soit f une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$, qui a tout entier naturel associe le nombre de ses dizaines.
f est-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 4.

Montrez que l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & x + \sqrt{1+x^2} \end{array} \right.$ est une bijection et déterminez sa bijection réciproque.

Exercice 5.

Soit f une fonction strictement croissante et continue de $[a,b]$ sur $[f(a),f(b)]$. Démontrez que f est bijective.

Exercice 6.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une bijection croissante. Montrez que sa réciproque f^{-1} est croissante.