Bijection.

Intuitivement une bijection est une fonction qui à chaque élément de l'ensemble de départ associe un unique élément de l'ensemble d'arrivée et réciproquement. Nous allons donner des expressions analytiques de cette propriété.

I Définitions.

1 Application.

Définition 1

Soient :

. E et F des ensembles,

. $f : E \to F$ une fonction.

Nous dirons que f est une application *application* si et seulement si son ensemble de départ, E, est son domaine de définition, $\mathscr{D}_f$.

Exemples.

1. Exemples, contre exemple.

Remarques.

1. Autrement dit tout élément de l'ensemble de départ a une image et une seule.

2 Injectivité, surjectivité et bijection.

Définition 2

Soient :

. E et F des ensembles,

. $f : E \to F$ une application.

Nous dirons f est *injective* si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Nous dirons que f est *surjective* si et seulement si :

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y.$$

Nous dirons que f est *bijective* si et seulement si f est injective et surjective.

Exemples.

1. Diagrammes sagittaux : injectif, pas injectif.

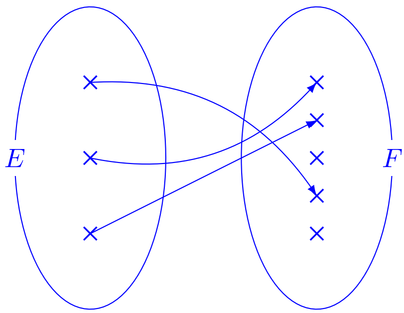


Diagramme sagittal de Venn.

2. Démonstration de l'injectivité d'une fonction affine.
3. Visualisation graphique de l'injectivité.
4. Injectivité dans les fonctions de référence.
5. Modifier le domaine de définition pour obtenir une fonction injective : fonction carré.
6. Diagrammes sagittaux : surjectif, pas surjectif.

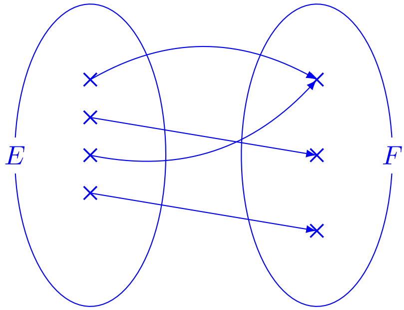


Diagramme sagittal de Venn.

7. Démonstration de la surjectivité d'une fonction affine.
8. Visualisation graphique de la surjectivité.
9. Fonctions de référence surjectives.
10. Diagrammes sagittaux : exemple, contre-exemple.
11. Fonctions de références. Translation, rotation.

Remarques.

1. Une application est injective si et seulement si chaque élément de l'ensemble image $f(E)$ admet un unique antécédent par f.
2. Une application est injective si les images d'éléments distincts sont distinctes.
3. Une application est surjective si chaque élément de l'ensemble d'arrivé F admet, au moins un antécédent.
4. L'application $\tilde{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & f(E) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ est surjective. Autrement dit on peut définir, à partir de f une surjection de E sur $f(E)$.
5. Pour démontrer l'injectivité on peut utiliser la contraposée $\forall x \in E,\ \forall x' \in E,\quad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.

Proposition 1

Soient :

. E et F des ensembles,

. $f : E \rightarrow F$ une application.

f est bijective si et seulement si : $\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ f(x) = y$.

Démonstration

Conséquence immédiate du fait que l'application est à la surjective et injective. ■

Remarques.

1. Dire qu'une application est bijective signifie que tous les éléments des ensembles de départ et d'arrivée sont reliés entre eux et que chaque élément est associé à un seul élément de l'autre ensemble.

Proposition 2

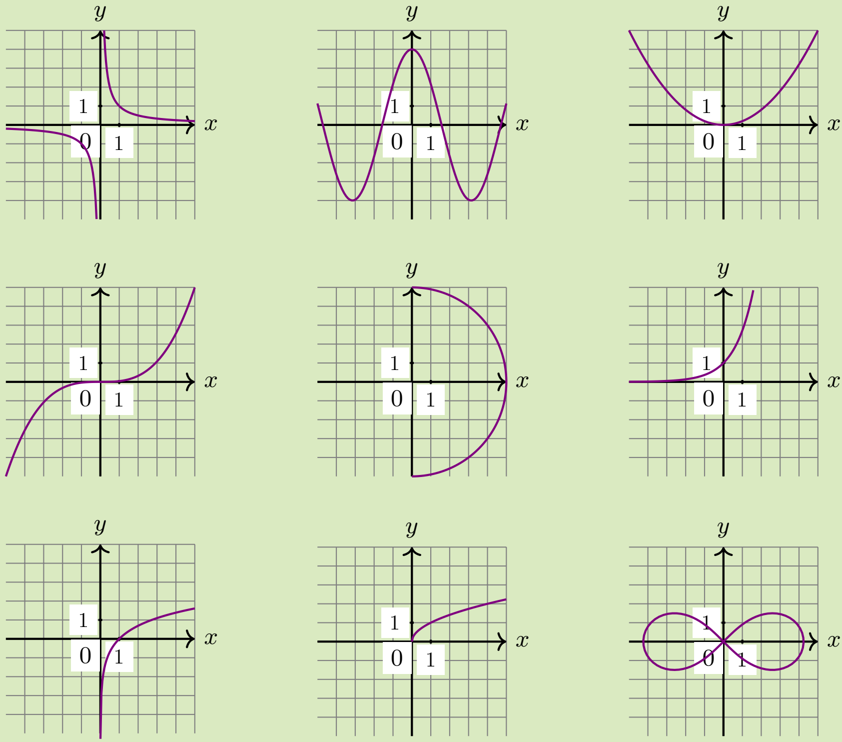
Si f est strictement monotone alors f est injective.

Remarques.

1. Ce résultat n'est valable que pour les fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans une partie de $\mathbb{R}$.

Exercice 1.

Dites d'après le graphe si les fonctions sont injectives, surjectives, bijectives ou autre.



II Démontrer qu'une application est une bijection avec le théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 1 - de la bijection.

Soient :

. E et F des parties de $\mathbb{R}$,

. $f : E \to F$ une application,

. I un intervalle de E.

Si f est continue et strictement monotone sur I alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

Démonstration

C'est un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

■

III Fonction réciproque.

1 Définition.

Théorème 2 et définition.

Soient :

. E et F des parties de $\mathbb{R}$,

. $f : E \to F$ une application.

f est une bijection si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que :

$$g \circ f = Id_E \text{ et } f \circ g = Id_F.$$

Dans ce cas g est appelée une *application réciproque de f* (ou une bijection réciproque de f).

Exemples.

1.

Proposition 3

Soient :

. E et F des parties de $\mathbb{R}$,

. $f : E \to F$ une application bijective.

f admet une unique fonction réciproque.

Proposition 4

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Démonstration

$$(g \circ f) \circ \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) =$$

et

$$\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) \circ (g \circ f) =$$

■

Remarques.

1. La réciproque de f étant unique sera notée f^{-1}
2. Ainsi la réciproque de f est l'application qui à chaque élément de F associe son unique antécédent par f.

   Si $f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & y = f(x) \end{array} \right.$ est une bijection, alors il existe une application notée f^{-1}, qui est appelée l'*application réciproque* de f et qui est définie par

   $$\forall y \in F,\ f^{-1}(y) = x$$

3. Quelque soit x dans E, $f^{-1} \circ f(x) = x$.
4. Quelque soit y dans F, $f \circ f^{-1}(y) = y$.

2 Aspect géométrique.

Proposition 5

Soient :

. E et F des parties de $\mathbb{R}$,

. $f : E \to F$ une application,

. $g : E \to F$ une application,

. $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les graphes respectivement de f et g dans un repère orthonormé.

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$) si et seulement si f et g sont réciproques l'une de l'autre.

Remarques.

1. Autrement dit les points $(x; f(x))$ et $(f(x); x)$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.
2. La première bissectrice est la courbe représentative de la fonction Id.
3. Plus généralement, si E et F sont des ensembles quelconques alors, $(x,y) \in \mathscr{C}_f \iff (y,x) \in \mathscr{C}_{f^{-1}}$.

3 Fonction réciproque et dérivation.

Proposition 6

Soient :

. I et J des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$,

. $a \in I$,

. $f : I \to J$ une application bijective strictement monotone.

Si f est dérivable en a et et $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Remarques.

1. Lorsque tout se passe bien, on retiendra, la formule mnémotechnique :

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

IV Exercices.

Exercice 2.

Indiquez si les fonctions suivantes admettent une fonction réciproque. Dans l'affirmative, précisez cette fonction.

1. Ensemble de départ $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Ensemble d'arrivée $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. $f(x)=\frac{1}{x}$.
2. Ensemble de départ $\mathbb{R}$. Ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$. $f(x)=2-x^2$.
3. Ensemble de départ $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$. Ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$. $f(x)=\frac{x+2}{2x-3}$.
4. Ensemble de départ $\mathbb{R}_+$. Ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$. $f(x)=\sqrt{x}$.

Exercice 3.

Soit f une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$, qui a tout entier naturel associe le nombre de ses dizaines.
f est-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 4.

Montrez que l'application $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & x+\sqrt{1+x^2}\end{array}\right.$ est une bijection et déterminez sa bijection réciproque.

Exercice 5.

Soit f une fonction strictement croissante et continue de $[a,b]$ sur $[f(a),f(b)]$. Démontrez que f est bijective.

Exercice 6.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une bijection croissante. Montrez que sa réciproque f^{-1} est croissante.