Bijection.

Intuitivement une bijection est une fonction qui à chaque élément de l'ensemble de départ associe un unique élément de l'ensemble d'arrivée et réciproquement. Nous allons donner des expressions analytiques de cette propriété.

Définitions.

Définition 1. Soient E et F des ensembles, $f : E \to F$ une fonction. Nous dirons que f est une application *application* si et seulement si son ensemble de départ, E, est son domaine de définition, $\mathscr{D}_f$.

Exemples.

1. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right.$ est une fonction mais pas une application car 0 n'a pas d'image par f.

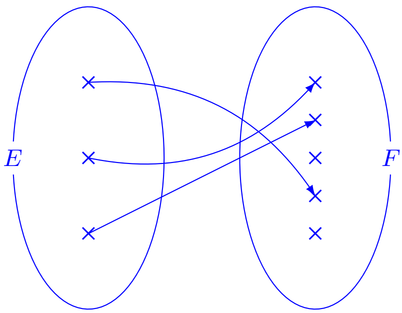
Remarques.

1. Autrement dit tout élément de l'ensemble de départ a une image et une seule.
2. Toute application est une fonction mais la réciproque est fausse.

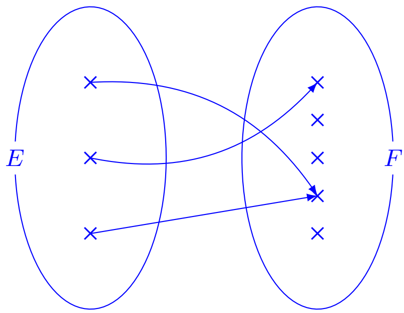
Définition 2. Soient E et F des ensembles, $f : E \to F$ une application.
Nous dirons f est *injective* si et seulement si : $\forall (x_1,x_2) \in E^2$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
Nous dirons que f est *surjective* si et seulement si : $\forall y \in F$, $\exists x \in E$, $f(x) = y$.
Nous dirons que f est *bijective* si et seulement si f est injective et surjective.

Exemples.

1. Diagrammes sagittaux de Venn :



Injective.



Pas injective.

2. Démonstration de l'injectivité de l'application $f : x \mapsto 2x - 6$ définie sur $\mathbb{R}$.
Soit $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$.
Supposons que $f(x_1) = f(x_2)$ et démontrons que $x_1 = x_2$.
De $f(x_1) = f(x_2)$ nous déduisons successivement :

$$\begin{aligned} 2x_1 - 6 &= 2x_2 - 6 \\ 2x_1 &= 2x_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Nous avons démontré que : $\forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

$$\boxed{f \text{ est injective.}}$$

3. Montrer qu'une fonction n'est pas injective. Il suffit de montrer que, au moins, deux éléments distincts de l'ensemble de départ ont la même image.
   La fonction carré n'est pas injective car $(-3)^2 = 2^2$.
4. Visualisation graphique de l'injectivité.
5. Injectivité pour les fonctions de référence. La fonction inverse est injective de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$. La fonction carré n'est pas injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La fonction cube est injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La fonction racine carrée est injective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.
6. Modifier le domaine de définition pour obtenir une fonction injective : la fonction.
7. Diagrammes sagittaux : surjectif, pas surjectif.

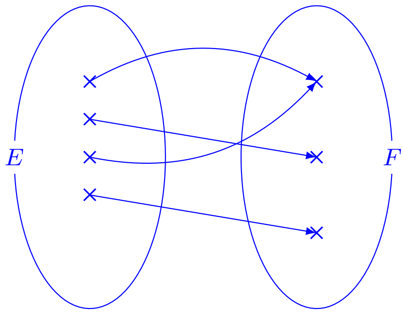


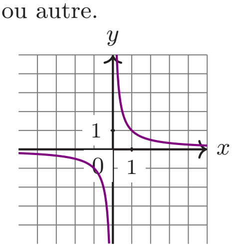
Diagramme sagittal de Venn.

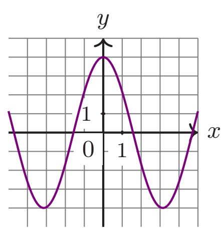
8. Démonstration de la surjectivité d'une fonction affine.
9. Visualisation graphique de la surjectivité.
10. Fonctions de référence surjectives.
11. Diagrammes sagittaux : exemple, contre-exemple.
12. Fonctions de références. Translation, rotation.

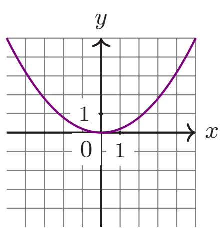
Remarques.

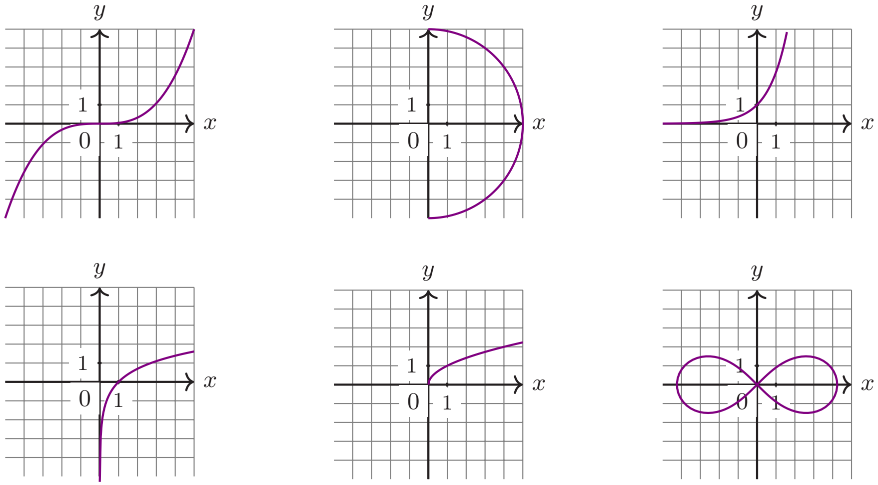
1. Une application est injective si et seulement si chaque élément de l'ensemble image $f(E)$ admet un unique antécédent par f.
2. Une application est injective si les images d'éléments distincts sont distinctes.
3. Une application est surjective si chaque élément de l'ensemble d'arrivé F admet, au moins un antécédent.
4. L'application $\tilde{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & f(E) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ est surjective. Autrement dit on peut définir, à partir de f une surjection de E sur $f(E)$.
5. Pour démontrer l'injectivité on peut utiliser la contraposée $\forall x \in E, \forall x' \in E, \quad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.

EXERCICE 1. Dites d'après le graphe si les fonctions sont injectives, surjectives, bijectives ou autre.









Caractérisation et propriétés.

Proposition 1. Soient E et F des ensembles, $f : E \to F$ une application. f est bijective si et seulement si : $\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ f(x) = y$.

Démonstration. Conséquence immédiate du fait que l'application est à la surjective et injective.

Remarques.

1. Dire qu'une application est bijective signifie que tous les éléments des ensembles de départ et d'arrivée sont reliés entre eux et que chaque élément est associé à un seul élément de l'autre ensemble.

Proposition 2. La composée de deux injections (resp. surjections, resp. bijections) est une injection (resp. surjection, resp. bijection).

Démonstration.

* Pour l'injectivité. Il suffit d'appliquer la définition de l'injection.
* Pour la surjectivité. Il suffit d'appliquer la définition de la surjection.
* La bijectivité découle des deux points précédents.

Proposition 3. Soient E, F, G des ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications. Si $g \circ f$ est injective alors f est injective. Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Démonstration.

* Supposons que $g \circ f$ est injective.
  Soit $(x_1,x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$.
  On en déduit : $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ et puisque $g \circ f$ est injective $x_1 = x_2$. Autrement dit $g \circ f$ est injective.
* Supposons que $g \circ f$ est surjective.
  Soit $y \in G$.
  $g \circ f$ est surjective donc il existe $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = y$. Autrement dit $f(x)$ est une antécédent de y par g et donc g est surjective.

Monotonie et injectivité.

Proposition 4. Si f est strictement monotone alors f est injective.

Démonstration.

Remarques.

1. Ce résultat n'est valable que pour les fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans une partie de $\mathbb{R}$.

Démontrer qu'une application est une bijection avec le théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 1. - de la bijection. Soient E et F des parties de $\mathbb{R}$, $f : E \to F$ une application, I un intervalle de E. Si f est continue et strictement monotone sur I alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

Démonstration. C'est un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

Fonction réciproque.

Théorème 2. Soient E et F des parties de $\mathbb{R}$, $f : E \to F$ une application. f est une bijection si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que : $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$. Dans ce cas g est appelée une *application réciproque de f* (ou une bijection réciproque de f).

Exemples.

1. Si $f : x \mapsto 4x + 8$ et $g : y \mapsto \frac{1}{4}y - 2$ alors on vérifie que $g \circ f(x) = x$ et $f \circ g(y) = y$ et donc g est une réciproque de f.
2. La réciproque de $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \to \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto \quad \frac{1}{x} \end{cases}$ est f elle-même : $f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = x$.

Proposition 5. Soient E et F des parties de $\mathbb{R}$, $f : E \to F$ une application bijective. f admet une unique fonction réciproque.

Démonstration.

Remarques.

1. La réciproque de f étant unique sera notée f^{-1}.
2. L'application réciproque est le symétrique de f pour la loi de composition interne tandis que Id_E et Id_F sont des neutres à droite et à gauche pour la loi de composition.
3. Ainsi la réciproque de f est l'application qui à chaque élément de F associe son unique antécédent par f.
   Si $f : \begin{cases} E & \to & F \\ x & \mapsto & y = f(x) \end{cases}$ est une bijection, alors il existe une application notée f^{-1}, qui est appelée l'*application réciproque* de f et qui est définie par $\forall y \in F$, $f^{-1}(y) = x$.
4. Quelque soit x dans E, $f^{-1} \circ f(x) = x$.
5. Quelque soit y dans F, $f \circ f^{-1}(y) = y$.
6. Une bijection qui égale sa réciproque, comme l'application inverse, est appelée une *involution*.
7. Une bijection d'un ensemble E sur lui-même est appelée *une permutation de E*.

Proposition 6. Soient E ,F et G des ensembles. Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des applications bijectives alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration. Nous avons déjà établi que la composée de deux bijections est une bijection.

$$(g \circ f) \circ \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) =$$

et

$$\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) \circ (g \circ f) =$$

Proposition 7. Soient E et F des parties de $\mathbb{R}$, $f : E \to F$ une application, $g : F \to E$ une application, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques respectivement de f et g dans un repère orthonormé. $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$) si et seulement si f et g sont réciproques l'une de l'autre.

Démonstration.

Remarques.

1. Dans le détail : les points $(x; f(x))$ et $(f(x); x)$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.
2. La première bissectrice est la courbe représentative de la fonction $Id_{\mathbb{R}}$.
3. Plus généralement, si E et F sont des ensembles quelconques alors, $(x,y) \in \mathscr{C}_f \iff (y,x) \in \mathscr{C}_{f^{-1}}$.

Proposition 8. La réciproque d'une fonction bijective continue est aussi une fonction continue.

Remarques.

1. Ce résultat se devine géométriquement les courbes de f et de f^{-1} sont symétriques l'une de l'autre, donc si l'une est d'un seul tenant alors l'autre l'est aussi.

Proposition 9. Soient I et J des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \to J$ une application bijective strictement monotone. Si f est dérivable en a et et $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et $\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.

Remarques.

1. Lorsque tout se passe bien, on retiendra, la formule mnémotechnique : $\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

Exercices.

EXERCICE 2. Indiquez si les fonctions suivantes admettent une fonction réciproque. Dans l'affirmative, précisez cette fonction.

1. Ensemble de départ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ensemble d'arrivée $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. $f(x) = \frac{1}{x}$.
2. Ensemble de départ $\mathbb{R}$. Ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$. $f(x) = 2 - x^2$.
3. Ensemble de départ $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$. Ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$. $f(x) = \frac{x+2}{2x-3}$.
4. Ensemble de départ $\mathbb{R}_+$. Ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$. $f(x) = \sqrt{x}$.

EXERCICE 3. Soit f une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$, qui a tout entier naturel associe le nombre de ses dizaines. f est-elle injective, surjective, bijective ?

EXERCICE 4. Montrez que l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & x + \sqrt{1+x^2} \end{array} \right.$ est une bijection et déterminez sa bijection réciproque.

EXERCICE 5. Soit f une fonction strictement croissante et continue de $[a,b]$ sur $[f(a),f(b)]$. Démontrez que f est bijective.

EXERCICE 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une bijection croissante. Montrez que sa réciproque f^{-1} est croissante.

EXERCICE 7.