# Équations différentielles linéaires d'ordre un à coefficients constants.

## I Vocabulaire.

Soient $a$, $b$ et $c$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et $a$ non identiquement nulle. On appelle équation différentielle linéaire d'ordre un toute équation de la forme $ay' + by + c = 0$.

Si $a$, $b$ et $c$ sont des fonctions constantes alors l'équation différentielle est dite linéaire d'ordre un à coefficients constants.

Si l'équation différentielle est linéaire d'ordre un à coefficients constants, puisque $a \neq 0$, il est possible de se ramener à une équation normalisée (ou résolue en $y$) : $y' + \frac{b}{a}y + \frac{c}{a} = 0$.

Nous allons nous intéresser à cette dernière équation dite avec second membre, mais en modifiant les notations comme suit :

$$(E_1) : \ y' - ay = b,$$

où$(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Remarquons que le cas $a = 0$ correspondrait à une recherche de primitive de la fonction constante égale à $b$.

Nous serons amené à nous intéresser à l'équation différentielle sans second membre, appelée équation homogène :

$$(E_0) : \ y' - ay = 0.$$

## II L'équation homogène.

### 1 Cas général.

Proposition 1

L'équation différentielle $(E_0) : \ y' - ay = 0$ d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet pour solutions les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{ax}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
Autrement dit l'ensemble des solutions de $(E_0)$ est $\mathscr{S}_0 = \left\{x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{ax} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

Démonstration

Nous allons montrer que deux ensembles sont égaux : $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle et l'ensemble $E = \left\{x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{ax} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. Une méthode classique pour démontrer une égalité de deux ensembles consiste à démontrer une double inclusion : $E \subset \mathscr{S}_0$ et $\mathscr{S}_0 \subset E$. Enfin, pour démontrer une inclusion $A \subset B$, il faut et il suffit de démontrer que tout élément de $A$ appartient aussi à $B$.

* Démontrons que $E \subset \mathscr{S}_0$.

  Soit $f \in E$. Donc il existe $\lambda_f \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \mapsto \lambda_f \mathrm{e}^{ax}$.

  On vérifie facilement que $f'(x) - af(x) = 0$ et donc $f \in \mathscr{S}_0$.

  Par conséquent

  $$\boxed{E \subset \mathscr{S}_0.}$$

* Démontrons que $\mathscr{S}_0 \subset E$.

  Soit $g \in \mathscr{S}_0$. Autrement dit $g$ vérifie $g' - ag = 0$.

  Pour démontrer que $g$ est de la forme $\lambda \mathrm{e}^{ax}$ nous allons démontrer que $\frac{g(x)}{\mathrm{e}^{ax}} = \lambda$ pour tout $x$, *i.e* que la fonction est constante.

  Soit $h : x \mapsto g(x)\mathrm{e}^{-ax}$.

  $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x$ réel, $h'(x) = g'(x)\mathrm{e}^{-ax} + ag(x)\mathrm{e}^{-ax} = \left[g'(x) - ag(x)\right]\mathrm{e}^{-ax} = 0$ puisque $g \in \mathscr{S}_0$.

  De $h' = 0$ nous déduisons que $h$ est constante et donc qu'il existe $\lambda in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = \lambda \mathrm{e}^{ax}$. Autrement dit $g \in E$.

  Ceci étant vrai pour tout $g \in \mathscr{S}_0$,

  $$\boxed{\mathscr{S}_0 \subset E.}$$

Puisque nous avons établi une double inclusion

$$\boxed{\mathscr{S}_0 = E.}$$

■

## 2 Problème de Cauchy.

Corollaire 1 - Théorème de Cauchy-Lipschitz.

Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' - ay = 0 \\ y(\alpha) = \beta \end{cases}$$

admet une unique solution.

Remarques.

1. La condition $y(\alpha) = \beta$ est appelée une condition initiale.
2. Il existe diverse formes de conditions initiales. $\lim_{-\infty} y = 1$ est une condition initiale.

### 3 Structure de l'ensemble des solutions.

Proposition 2

L'ensemble des solutions de $(E_0)$ est un espace vectoriel.

## III L'équation avec second membre constant.

### 1 Principe de superposition.

Proposition 3

$g$ est solution de $5_1$ si et seulement s'il existe des fonctions $f_1$ solution de $(E_1)$ et $f_0$ solution de $(E_0)$ telles que $g = f_1 + f_0$.

Remarques.

1. En superposant une solution de $E_0)$ à une solution de $(E_1)$ on obtient une nouvelle solution de $(E_1)$.
2. Cette situation est souvent décrite en disant que les solutions de $(E_1)$ sont obtenues comme somme des solutions de $(E_0)$ et d'une solution particulière de $(E_1)$.

### 2 Résolution de $(E_1)$.

Proposition 4

Soit $f_1$ une solution de $(E_1)$.

$$\mathscr{S}_1 = \left\{ f_0 - \frac{b}{a} \mid f_0 \in \mathscr{S}_0 \right\}.$$

Démonstration

On démontre l'égalité d'ensembles par double inclusion.

■

### 3 Problème de Cauchy.

Corollaire 2 - Théorème de Cauchy-Lipschitz.

Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' - ay = b \\ y(\alpha) = \beta \end{cases}$$

admet une unique solution.

## IV Équation différentielle avec second membre quelconque.

Proposition 5

$(E_2)$ : $y' - ay = f$.
Soit $f_2$ une solution de $(E_2)$.

$$\mathscr{S}_2 = \{f_0 + f_2 \mid f_0 \in \mathscr{S}_0\}.$$