Calcul intégral.

I L'intégrale.

1 Aspect historique et géométrique.

Comme (presque) toujours en mathématiques les théorie prennent naissance dans la géométrie. Le calcul intégral est l'aboutissement (en lien avec les fonctions) des problèmes de mesure d'aire.

Les mesures d'aires étaient appelés problèmes de quadratures. Dans le monde sans unité internationale de l'antiquité grecque, tout est question de rapport, de comparaison. Mesurer une aire c'est être capable de se ramener à des figures de même aire mais plus simples (carré, rectangle). Nous ne faisons pas autre chose en utilisant des cm^2 : nous comparons les aires à des petits carrés de 1 cm de côté. De plus ces petits carrés sont partout grâce au quadrillage induit par un repère orthonormé.

On peut imaginer un cheminement assez naturel. L'aire d'un rectangle est obtenue en le recouvrant de petits carrés son aire est alors le nombre de petits carrés. Ce dénombrement est simple : nombre de carrés unités sur la largeur multiplié par le nombre de carrés sur la longueur. L'aire d'un triangle est la moitié de l'aire d'un rectangle. L'aire d'un triangle quelconque est l'aire de deux triangles rectangles. L'aire d'un trapèze est l'aire de deux triangles et d'un rectangle. L'aire des lunules d'Hippocrate donnèrent aux Grecs bon espoir de pouvoir poursuivre cette démarche dans des cas de figures « arrondies » comme le cercle ou la parabole. Mais le problème de la quadrature du cercle resta si longtemps irrésolu que l'expression passa dans le langage courant pour désigner un problème insoluble. Ce problème est en réalité résolu : il est impossible de recouvrir un cercle avec les procédés usuels des Grecs.

Cependant il est un Grec, Archimède, qui trouva une parade. Recouvrir les figures par des figures dont on sait calculer l'aire certes, mais en nombre infini.

Un célèbre palimpseste semble indiquer qu'Archimède alla encore plus loin : il recouvrit la surface sous une parabole par une infinité de figures dont l'aire devenait infiniment petite. Il avait inventer le calcul intégral. Cette découverte fut oubliée pendant deux mille ans jusqu'à ce que Leibnitz et Newton inventent une procédé similaire au $XVII^{\text{e}}$ siècle.

Voyons l'idée d'Archimède.

On voit alors apparaître un encadrement de l'aire recherchée :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} \leqslant \mathscr{A} \leqslant \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}.$$

Bien sûr plus n est grand, plus l'encadrement se ressert et se rapproche de l'aire sous la courbe : idéalement lorsque n devient infiniment grand nous devrions obtenir exactement l'aire sous la parabole.

Dans le cas de la parabole on a donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n} \leqslant \mathscr{A} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}.$$

Donc :

$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}k^2 \leqslant \mathscr{A} \leqslant \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2.$$

D'où :

$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \leqslant \mathscr{A} \leqslant \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

En passant à la limite, et d'après le théorème des gendarmes : $\mathscr{A} = \frac{1}{3}$.

Ce procédé est le fondement théorique de ce calcul d'aire appelé intégrale de Riemann.

2 L'intégrale de Riemann pour calculer des aires.

Définition 1

Soient :

. a et b des réels $a < b$,

. f une fonction continue sur $[a,b]$.

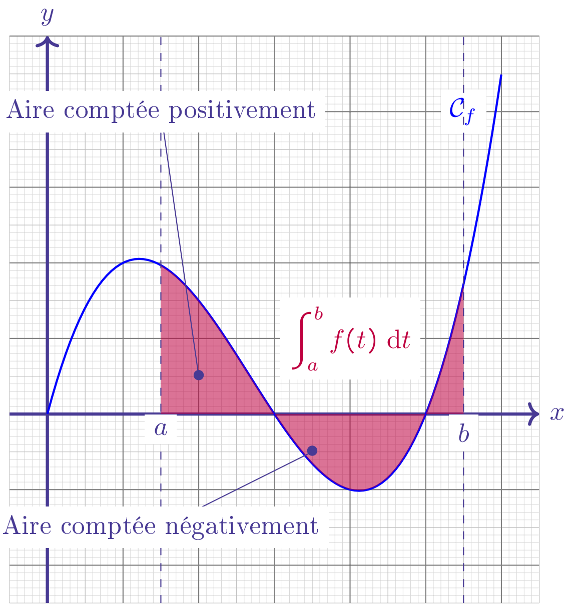
L'aire algébrique (positive ou négative) placée entre la courbe représentative d'une fonction f, l'axe des abscisses et deux droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$, et notée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est appelée *intégrale de f sur $[a;b]$*.

Remarques.

1. La notation est en fait un calque de la formule qui permet avant passage à la limite de calculer l'intégrale : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(x_i\right)\Delta x_i$.

Discret.	Continu.	Interprétation.
n	t	
$\frac{1}{n}$	$\mathrm{d}t$	Largeur d'un rectangle.
$f\left(\frac{k}{n}\right)$	$f(t)$	Longueur d'un rectangle.
Σ	$\int$	Somme.
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$	$\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$	Somme des aires des rectangles.

2. Géométriquement, visuellement, voyons ce que cela donne.



Pour décrire en français la région du plan colorée ci-dessus nous dirons que c'est la surface comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = a$ et la droite d'équation $x = b$.

Exercice 1. ⚽
Comment peut-on noter l'aire (pas algébrique cette fois-ci) colorée ?

Remarques.

1. La notation dt dans la pratique permet simplement d'identifier la variable. Quelle est la variable dans l'expression $a(r-\alpha)^2+\beta$?
2. dt qui est un infiniment petit correspond à la construction qui permet de définir l'intégrale (comme somme d'aires de rectangles de largeur dt). Il est également présent dans les calculs de dérivés pour le taux d'accroissement entre infiniment petits
$$f'(t)=\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$$
3. Nous pouvons définir une nouvelle fonction en considérant b comme une variable
$$x\mapsto\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
Nous verrons plus loin que cette fonction est une primitive de f.
4. Le procéder de somme discrète avec passage à la limite ne fonctionne pas toujours. Il faut des fonctions suffisamment régulière (continue par exemple) pour pouvoir l'utiliser.
Nous dirons qu'une fonction est *intégrable* lorsque le calcul d'aire est "possible".

3 Les propriétés de l'intégrale.

Par convention, si f est intégrable sur $[a,b]$, nous noterons :

$$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t := -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Les propriétés suivantes se devinent aisément par les graphiques. Ce sont des propriétés indispensables pour des calculs d'aires. Si les intégrales de Riemann ne les avaient satisfaites nous aurions oublié ce procédé pour un autre.

Proposition 1 - Propriétés admises de l'intégrale.

Soient :

. $(a,b,c,\lambda) \in \mathbb{R}^4$,

. f une fonction intégrable sur $[a,b]$.

Si la surface est réduite à un segment l'aire est nulle :

$$\int_a^b 0 \, \mathrm{d}t = 0.$$

Relation de Chasles :

$$\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t = \int_a^c f(t) \, \mathrm{d}t + \int_c^b f(t) \, \mathrm{d}t$$

Linéarité :

$$\int_a^b \lambda f(t) + g(t) \, \mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t + \int_a^b g(t) \, \mathrm{d}t.$$

Croissance (et donc positivité), pour $a < b$:

$$f \leqslant g \Rightarrow \int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t) \, \mathrm{d}t.$$

Démonstration

Ces propriétés se démontrent en utilisant la construction de Riemann des intégrales.

Remarquons qu'elles pourront être démontrées en utilisant l'existence d'une primitive vue plus loin.

■

Théorème 1 - admis

Les fonctions continues sur des segments sont intégrables.

Exercice 2.

Au moyen de considérations géométriques élémentaires, calculez :

a) $\mathscr{A}_1 = \int_a^b m \, \mathrm{d}t$ avec $m > 0$.

b) $\mathscr{A}_2 = \int_1^2 t \, \mathrm{d}t$.

c) $\mathscr{A}_3 = \int_2^3 m \, \mathrm{d}t$.

II Valeur moyenne d'une fonction.

1 Inégalités de la moyenne.

Proposition 2

Soient :

. a et b deux réels tels que $a < b$,

. f une fonction continue sur $[a,b]$,

. m et M des réels.

Si $m \leqslant f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in [a,b]$ alors

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M(b-a).$$

Exercice 3.

Démontrez que $-2 \leqslant \int_1^3 \sin(x^2)\,\mathrm{d}x \leqslant 2$.

Exercice 4.

Soit $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,\mathrm{d}t$. Démontrez que $0 \leqslant I \leqslant \frac{\pi^2}{4}$ sans calculer I.

Exercice 5.

Soit f la fonction définie sur $[-1;0]$ par

$$f(x) = \frac{3x+4}{(x+2)^2}.$$

1. Dressez le tableau de variation de f.
2. Déduisez-en un encadrement de $f(x)$ sur $[-1;0]$.
3. Montrez que
$$1 \leqslant \int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{9}{8}.$$

Corollaire 1 - Inégalité de la moyenne avec valeur absolue.

Si $|f(x)| \leqslant M$ alors $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M(b-a)$.

2 Valeur moyenne d'une fonction.

Définition 2

Soient :

. a et b des réels avec $a < b$,

. f une fonction continue sur $[a,b]$.

Nous appellerons *valeur moyenne de f sur $[a,b]$* le réel

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Remarques.

1. Autrement dit μ est la réponse à la question : quelle serait la hauteur d'un rectangle dont un côté a une longueur de $b-a$ et dont l'aire égale celle $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$?

III Les primitives (rappels).

Si $F' = f$ alors nous dirons que F est *une primitive de f* sur leur ensemble de définition.

Dans la littérature les dérivées successives (si elles existent) sont notées

$$F,\ f,\ f',\ f'',\ f^{(3)},\ f^{(4)},\ \ldots$$

Dans cette suite nous pouvons dire que F est une primitive de f, qui est elle-même une primitive de f', qui est elle-même une primitive de f'', *etc.*

Il n'y a pas unicité de la primitive. Si $F' = f$ alors pour a une constante réelle, $(F+a)' = F' = f$.

Les primitives d'une fonction sur un intervalle diffèrent entre elles d'une constante. Ainsi, si F_1 et F_2 sont des primitives de f, alors $F_1 - F_2$ est une constante.

Pour spécifier une primitive on indique une valeur particulière ; très souvent nous préciserons : la primitive de f qui s'annule en a, autrement dit $F(x) - F(a)$ où F désigne n'importe quelle primitive de f.

Dans la pratique pour calculer les primitives nous utiliserons les dérivées usuelles :

Fonction	Primitives
x^{α}, avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$, avec $C \in \mathbb{R}$
$x^{-1} = \dfrac{1}{x}$	$\ln x + C$, avec $C \in \mathbb{R}$
$\sin$	$-\cos + C$, avec $C \in \mathbb{R}$
$\cos$	$\sin + C$, avec $C \in \mathbb{R}$
e^{x}	$\mathrm{e}^{x} + C$, avec $C \in \mathbb{R}$

Si F et G sont des primitives de f et g, alors quelque soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda F + G$ est une primitive de $\lambda f + g$.

En utilisant la formule de dérivation des fonctions composées, f et u désignant des fonctions,

$$[f(u)]' = u' \times f'(u)$$

nous généralisons le précédent tableau de primitives.

Fonction	Primitives
$u' \times u^{\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1} + C$, avec $C \in \mathbb{R}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u + C$, avec $C \in \mathbb{R}$
$u' \sin(u)$	$-\cos(u) + C$, avec $C \in \mathbb{R}$
$u' \cos(u)$	$\sin(u) + C$, avec $C \in \mathbb{R}$
$u' \mathrm{e}^{u}$	$\mathrm{e}^{u} + C$, avec $C \in \mathbb{R}$

Exercice 6.

Soit f et F deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = 4x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 7x - 2$ et $f(x) = 12x^2 - 3x + 7$.
Montrez que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7.

Trouvez toutes les primitives sur I des fonctions suivantes :

a) $f(x) = -2x + 3$, $I = \mathbb{R}$,

b) $g(x) = 5x^2 + x + 1$, $I = \mathbb{R}$,

c) $h(x) = \frac{1}{x^2}$, $I =]0, +\infty[$.

Exercice 8.

Soit $f : x \mapsto 3x^2 + 3x - 1$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Déterminez la primitive de f qui s'annule en 1.

Exercice 9.

Déterminez une primitive de f sur l'intervalle I donné.

a) $f(x) = 5x^6 - 2x^3 + 3x^2 + 7$, $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = -2x^8 + 7x^4 + x^3$, $I = \mathbb{R}$.

c) $f(x) = x^7 + 2x^6 - 5x^2 - 1$, $I = \mathbb{R}$.

d) $f(x) = \dfrac{3}{x^7} + \dfrac{1}{x^2}$, $I =]0; +\infty[$.

e) $f(x) = 3x^2(x^3 + 2)^4$, $I = \mathbb{R}$.

f) $f(x) = \dfrac{-5}{(1 - 5x)^2}$, $I = \left]-\infty; \frac{1}{5}\right[$.

g) $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$, $I = \mathbb{R}$.

h) $f(x) = -\dfrac{\sin x}{\cos x}$, $I = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

i) $f(x) = (2x + 3)e^{x^2+3x-7} + \cos x$, $I = \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 9

a) $F(x) = \frac{5}{7}x^7 - \frac{2}{4}x^4 + x^3 + 7x$.

b) $F(x) = -\frac{2}{9}x^9 + \frac{7}{5}x^5 + x^4$.

c) $F(x) = \frac{1}{8}x^8 + \frac{2}{7}x^7 - \frac{5}{3}x^3 - x$.

d) $F(x) = -\frac{1}{2x^6} - \frac{1}{x}$.

e) $F(x) = \frac{1}{5}(x^3 + 2)^5$.

f) $F(x) = -\frac{1}{1-5x}$.

g) $F(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$.

IV Théorèmes fondamentaux de l'analyse.

Théorème 2 - Premier théorème fondamental de l'analyse.

Soient :

. $a < b$ des réels,

. f une fonction continue sur $[a;b]$.

Si F est la fonction définie sur $[a;b]$ par

$$\forall x \in [a;b],\ F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t.$$

alors

$$\forall x \in [a;b],\ F'(x) = f(x).$$

Démonstration

Soit $x_0 \in [a;b]$.

Démontrons que le nombre dérivé de F en x_0 est $f(x_0)$ en supposant f croissante.

Soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in [a;b]$.

$$\begin{aligned}
&\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \\
&= \frac{1}{h}\left[F(x_0+h) - F(x_0)\right] - f(x_0) \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_a^{x_0+h} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\ \mathrm{d}t\right] - \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{f(x_0)}{(x_0+h) - x_0}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_a^{x_0+h} f(t)\ \mathrm{d}t + \int_{x_0}^{a} f(t)\ \mathrm{d}t\right] - \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\ \mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0)\ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Supposons, par exemple, $h > 0$.
Pour tout $t \in [x_0; x_O + h]$, f étant croissante :

$$f(x_0) \leqslant f(t) \leqslant f(x_0 + h).$$

Donc en intégrant sur $[x_0; x_0 + h]$ et puisque l'intégrale est croissante :

$$0 \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0)\ \mathrm{d}t \leqslant h\left[f(x_0 + h) - f(x_0)\right].$$

Puis, comme $h \neq 0$:

$$0 \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0)\ \mathrm{d}t \leqslant f(x_0 + h) - f(x_0).$$

Or, f étant continue, $f(x_0 + h) - f(x_0) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0)\ \mathrm{d}t \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

■

Remarques.

1. Ainsi la fonction F définie dans ce théorème est la primitive de f qui s'annule en a. Par conséquent la recherche de primitive peut se ramener à un calcul d'intégrale.
2. Cela signifie aussi que tout pourrons toujours parler de la primitive d'une fonction continue même

Théorème 3 - Second théorème fondamental de l'analyse, formule de Newton-Leibniz.

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ avec $a < b$ des réels et F une primitive de f sur $[a; b]$.

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Démonstration

Découle du précédent théorème en remarquant que $x \mapsto \int_a^x f(t)\ dt$ est la primitive de f qui s'annule en a et en sachant que deux primitives diffères d'une constante.

■

Remarques.

1. Ce théorème ramène donc le calcul d'intégrale à des recherches de primitives. Par exemple

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{2t+1}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{2}\ln(t+1)\right]_0^1\\ &= \frac{1}{2}\ln(3) - \frac{1}{2}\ln(1)\\ &= \frac{1}{2}\ln(3)\end{aligned}$$

2. La quantité $F(b) - F(a)$ est souvent notée $[F(t)]_a^b$.

Exercice 10.

a) $\displaystyle\int_0^1 -3x+2\,\mathrm{d}x.$

b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x.$

c) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\,\mathrm{d}x.$

e) $\displaystyle\int_{-2}^1 x^2+2x\,\mathrm{d}x.$

f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x.$

g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{3x+2}\,\mathrm{d}x.$

h) $\displaystyle\int_{-1}^1 t^2+2t-1\,\mathrm{d}x.$

i) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{u}{2}\right)\,\mathrm{d}u.$

j) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(3y)\,\mathrm{d}y.$

k) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{2}{z^3}\,\mathrm{d}z.$

l) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(2t)-\sin(t)\,\mathrm{d}t.$

m) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin(3x)-4\cos(x)\,\mathrm{d}x.$

n) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\,\mathrm{d}x.$

o) $\displaystyle\int_{-1}^0 \mathrm{e}^{-2x+1}\,\mathrm{d}x.$

p) $\displaystyle\int_0^1 \frac{5}{2x-3}\,\mathrm{d}x.$

q) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x-3}{5}\,\mathrm{d}x.$

r) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x.$

s) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x.$

t) $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$

Exercice 11.

Calculez les intégrales.

a) $\displaystyle\int_0^4 t-3\ \mathrm{d}t$.

b) $\displaystyle\int_{-1}^2 t^2-4t+3\ \mathrm{d}t$.

c) $\displaystyle\int_1^2 t^2+t-\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$.

d) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{t}}-\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$.

e) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\ \mathrm{d}t$.

f) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(2t)\ \mathrm{d}t$.

g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(t+2)^3}\ \mathrm{d}t$.

h) $\displaystyle\int_0^1 5t\mathrm{e}^{t^2}\ \mathrm{d}t$.

i) $\displaystyle\int_{\ln(a)}^{\ln(b)} \mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t$ pour $0<a\leqslant b$.

j) $\displaystyle\int_0^2 5\mathrm{e}^{3t}\ \mathrm{d}t$.

k) $\displaystyle\int_1^9 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$.

l) $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}u}{(2u+1)^2}$.

m) $\displaystyle\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5-x}}$.

n) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)(x^2+x+1)\ \mathrm{d}x$.

o) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{3x+2}$.

p) $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{3t-4}\mathrm{d}t$.

q) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+3t}}$.

r) $\displaystyle\int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2}\ \mathrm{d}x$.

s) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{t^3}{t^4+2}\ \mathrm{d}t$.

t) $\displaystyle\int_0^1 (x-2)(x^2-4x+1)^2\ \mathrm{d}x$.

u) $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2-1}\ \mathrm{d}x$.

v) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-2t}}\ \mathrm{d}t$.

w) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(t)}{t}\ \mathrm{d}t$.

x) $\displaystyle\int_{\sqrt{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} \frac{1}{t\ln(t)}\ \mathrm{d}t$.

Exercice 12.

Démontrez que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=(-2x-3)\mathrm{e}^{-x}$, est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f, définie par $f(x)=(2x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

Déduisez-en la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$.

Exercice 13.

On souhaite calculer l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^t+1}\ \mathrm{d}t$. Posons $J=\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t+1}\ \mathrm{d}t$.
Calculez J, puis $I+J$ et déduisez-en I.

Exercice 14. ☯

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \sin(t)\mathrm{e}^{-nt}\ \mathrm{d}t$.
Montrez que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

V Intégration par parties.

Théorème 4 - Formule d'intégration par parties.

Soient :

. I un intervalle,

. u et v des fonction dérivables sur I dont les dérivées sont continues.

Pour tout a et b de I :

$$\int_a^b u(t)v'(t)\ \mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t.$$

Démonstration

En intégrant : $uv' = (uv)' - u'v$.

■

Exercice 15. ☯

Calculez $\int_1^{\mathrm{e}} x\ln(x)\ \mathrm{d}x$.

Exercice 16. ☯

Déterminez une primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 17. ☯

En procédant à deux intégrations par parties calculez $I = \int_0^{\pi} x^2\sin(x)\ \mathrm{d}x$.

Exercice 18. ⚽

Calculez $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\sin(x)\ \mathrm{d}x$.

Exercice 19. ⚽

Calculez $I = \int_0^1 (2t-1)\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t$, $J = \int_0^{\mathrm{e}} t^2(1-2\ln(t))\ \mathrm{d}t$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2t-1)\sin(t)\ \mathrm{d}t$.

Exercice 20. ⚽

Notons $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2t-3)\cos^2(t)\ \mathrm{d}t$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2t-3)\sin^2(t)\ \mathrm{d}t$.

1. Calculez $I + J$.
2. Calculez $I - J$ à l'aide d'une intégration par parties.
3. Déduisez-en les valeurs de I et J.

Exercice 21.

Exercice 22.

Exercice 23.

VI Calcul d'aire d'une surface limitée par une ou deux courbes.

Le calcul se fait en unités d'aires : $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$.

Proposition 3

(i) Soit $\mathscr{A}$ l'aire délimitée par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
Si f est positive sur $[a,b]$ alors $\mathscr{A} = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$.
Si f est négative sur $[a,b]$ alors $\mathscr{A} = \int_a^b -f(t)\ \mathrm{d}t$.
Sinon $\mathscr{A} = \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$.

(ii) Soit $\mathscr{A}$ l'aire délimitée par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
Si $f \leqslant g$ alors $\mathscr{A} = \int_a^b g(t) - f(t)\ \mathrm{d}t$.

Exercice 24. ☯

Soient $f : x \mapsto x^2 - \frac{3}{x}$ et $g : x \mapsto x^2$ définies sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculez l'aire du domaine limité par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = \frac{1}{2}$ et $x = 2$.

Exercice 25. ☯

Soient $f : x \mapsto 3x^2 - 7x + 2$ et $g : x \mapsto x^2 - 5x + 6$ définies sur $\mathbb{R}$. Calculez l'aire du domaine limité par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

VII Exercices.

Exercice 26.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 t^n e^{-t}\, dt$.

1. Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant 1$.
2. Démontrez que (I_n) est décroissante et en déduire que (I_n) est convergente.
3. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ et en déduire la limite de la suite (I_n).

Exercice 27.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 t^n \sin(t)\, dt$.

1. Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant 1$.
2. Démontrez que (I_n) est décroissante et en déduire que (I_n) est convergente.
3. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leqslant \frac{1}{n+1} \times \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$ et en déduire la limite de la suite (I_n).

Exercice 28.

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale : $I_n = \int_1^e (ln(x))^n\, dx$.

1. 1. a. Démontrer que pour tout x dans l'intervalle]1 ; e[, et pour tout n entier naturel, on a : (ln x)n - (ln x)n+1 > 0 b. En déduire que la suite (In) est décroissante. 2. a. Calculer I1 à l'aide d'une intégration par parties. b. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n N*, In = e - (n + 1)In . c. En déduire I2, I3 et I4. Donner les valeurs exactes, exprimées en fonction de e, et les valeurs approchées à 10-3 prés par défaut. 3. a. Démontrer que, pour tout n N*, In > 0. b. Démontrer que, pour tout n N*, (n + 1)In 6 e. c. En déduire la limite de In . d. Déterminer la valeur de nIn + (In + In+1) et en déduire la limite de nIn .

Exercice 29.

Il s'agit d'une initiation à la méthode utilisée pour calculer une intégrale d'une fraction rationnelle, c'est-à-dire d'un quotient de deux polynômes. La méthode consiste à rechercher une expression avec des éléments simples.

Soit $f : x \mapsto \frac{2x^2+5x+1}{x+3}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

1. Déterminez les réels a, b et c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+3}$.
2. Déduisez-en la valeur de l'intégrale $\int_{-2}^{-1} f(x)\, dx$.

Exercice 30.

Soit $I = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\, dx$.

1. Montrez que pour tout $x[0;1]$: $\frac{1}{1+e} \leqslant \frac{1}{1+e^x} \leqslant \frac{1}{2}$.
2. Déduisez-en un encadrement de I.

Exercice 31.

Soit $f : x \mapsto x - 3 + \mathrm{e}^{-2x}$ définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Montrez que $\mathscr{D} :\ y = x - 3$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
2. Étudiez la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$.
3. Déduisez-en l'aire du domaine limité par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{D}$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \ln(2)$.

Exercice 32.

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_0^x \frac{3-t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifiez que F existe.
2. Étudiez la variation de F sur $\mathbb{R}$.

VIII Inégalité des accroisements finis.

Exercice 33.

Exercice 34.

IX Intégrales généralisées.

Nous noterons $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ la limite de $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ quand x tend vers $+\infty$ si elle existe.

X Justification de l'existence de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

XI Changement de variable.