Convexité.

I Définition.

Définition 1

Soient :

. I un intervalle de $\mathbb{R}$,

. f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Nous dirons que f est convexe si et seulement si pour tous point A et B du graphe de f, $[AB]$ est tout entier au-dessus de ce graphe.

Définition 2

Soient :

. I un intervalle de $\mathbb{R}$,

. f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

f est dite concave si et seulement si $-f$ est convexe.

II Caractérisations pour les fonctions une fois dérivables.

Proposition 1 - Caractérisation par les variations de la fonction dérivée.

Soient :

. I un intervalle de $\mathbb{R}$,

. f une fonction définie et dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.

Corollaire 1 - Caractérisation par les tangentes.

Soient :

. I un intervalle de $\mathbb{R}$,

. f une fonction définie et dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

f est convexe sur I si et seulement si sa courbe représentative, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes.

III Caractérisation pour les fonctions deux fois dérivables.

Proposition 2 - Caractérisation par le signe de dérivée seconde.

Soient :

. I un intervalle de $\mathbb{R}$,

. f une fonction définie et dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I.

IV Inégalités.

Proposition 3 - Inégalité de Jensen.

Soient :

. i un intervalle de $\mathbb{R}$,

. f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si f est convexe sur I alors

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in [0;1],\ f\left(x + (1-t)y\right) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y).$$

Corollaire 2

Si f est convexe alors $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

V Exercices.