Convexité.

I Définition.

Exercice 1. ☯

II Caractérisations pour les fonctions une fois dérivables.

Exercice 2. ☯

Exercice 3. ☯

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x + 1$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminez la convexité de f.
2. Déterminez une équation de la tangente au point d'abscisse 0.
3. Déduisez-en que pour tout réel x appartenant à $[-2, +\infty[$, $f(x) \geqslant x + 1$.
4. Retrouvez le précédent résultat en résolvant l'inéquation $f(x) \geqslant x + 1$.

III Caractérisation pour les fonctions deux fois dérivables.

Exercice 4. ☯

Étudiez la convexité de la fonction

1. $f : x \mapsto x^3 - 5x^2 + 4x + 3$ sur $\mathbb{R}$.
2. $g : x \mapsto \frac{1}{2}x - \frac{3}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 5. ☯

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$. Nous admettons que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f est paire.
2. Étudiez le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$.
3. Étudiez la limite de f en $+\infty$.
4. Déduisez des questions précédentes le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminez l'équation de la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f au point d'abscisse 3.
6. (a) Vérifiez que pour tout réel x, $f''(x) = \dfrac{9}{(x^2 + 9)\sqrt{x^2 + 9}}$.

   (b) Déduisez-en les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et Δ.

Exercice 6. ⚽

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^6 + 3x^2 + 6$.

1. Montrez que f est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminez une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse 1.
3. Déduisez-en que pour tout réel x : $x^6 + 3x^2 + 6 \geqslant 12x - 2$

IV Inégalités.

Exercice 7. ☯

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Montrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{4}{x+5} \leqslant \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{5}$.
2. Déterminez une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 et déduisez-en que, pour tout nombre réel x strictement positif, $\frac{1}{x} \geqslant -\frac{x}{4} + 1$.

Exercice 8. ⚽

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^3$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Montrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x+1)^3 \leqslant 4x^3 + 4$.
2. Déterminez une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 et déduisez-en que, pour tout nombre réel x, $x^3 \geqslant 3x - 2$.
3. h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 5.$$

   En utilisant l'inégalité précédente, montrez que la fonction h est croissante sur $[0, +\infty[$.

V Exercices.

Exercice 9. ⚽

On appelle « satisfaction » toute fonction dérivable qui prend des valeurs comprises entre 0 et 100.
Lorsque la fonction « satisfaction » atteint 100 on dit qu'il y a « saturation ».
On définit aussi la fonction « envie » comme la fonction dérivée de la fonction « satisfaction ».
La direction des ressources humaines d'une entreprise modélise la satisfaction d'un salarié en fonction du salaire annuel qu'il perçoit. On admet que la fonction satisfaction h est définie sur $[10;50]$ par :

$$h(x) = \frac{90}{1+\mathrm{e}^{-0{,}25x+6}};$$

où x est exprimé en milliers d'euros.
On note $\mathscr{C}_h$ la courbe représentative de la fonction h.

1. Par lecture graphique sur votre calculatrice conjecturez la convexité de la fonction h ainsi que le sens de variation de la fonction « envie ». Donnez-en une interprétation.
2. D'après ce modèle serait-il possible d'atteindre la saturation ?
3. Vérifiez que pour tout $x \in [10;50]$:

$$h''(x) = \frac{5{,}625\mathrm{e}^{-0{,}25x+6}\left(\mathrm{e}^{-0{,}25x+6}-1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-0{,}25x+6}\right)^3}.$$

4. Déduisez-en la convexité de la fonction h.
5. À partir de quel salaire annuel peut-on estimer que la fonction « envie » décroît ?