Convexité.

I Définition.

Comme beaucoup d'anciennes notions mathématiques, la convexité trouve son origine dans la géométrie. La convexité est, à sa naissance, une propriété des ensembles de points de l'espace ou du plan. Un ensemble de point est dit convexe si tout couple de point de cet ensemble peut être relier par un segment qui ne sort pas de l'ensemble.

Puis cette notion a émergé dans une autre branche des mathématiques en analyse (étude des fonctions).

Les courbes représentatives de fonctions, du fait de la définition des fonctions, délimitent toujours le plan en deux parties : une partie au-dessus de la courbe et une autre au-dessous. La partie au-dessus, appelée épigraphe, peut être convexe et dans ce cas on dit qu la fonction est convexe.

De même que certaines symétries des courbes représentatives se traduisent par une notion analytique (la parité), la convexité se traduit par ne propriété analytique de la fonction encore appelée convexité.

Définition 1

Soient :

. I un intervalle de $\mathbb{R}$,

. f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Nous dirons que f est convexe si et seulement si pour tous point A et B du graphe de f, $[AB]$ est tout entier au-dessus de ce graphe.

Exemples.

1. Convexe.
2. Pas convexe montagnes russe.
3. Pas convexe concave.

Définition 2

Soient :

. I un intervalle de $\mathbb{R}$,

. f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

f est dite concave si et seulement si $-f$ est convexe.

Exemples.

1.

Remarques.

1. Les graphes de f et $-f$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
2. D'après la précédente remarque, dire que f est concave équivaut à dire que pour tous point A et B du graphe de f, $[AB]$ est tout entier au-dessus de ce graphe.
3. Nous appellerons *point d'inflexion* les points du graphe d'une fonction où elle change de convexité : passant de concave à convexe ou de convexe à concave.
4. « Étudier la convexité d'une fonction » c'est déterminer les intervalles sur lesquels la fonction est concave et ceux où elle convexe ainsi que les points d'inflexion.
5. Il n'est pas possible de lire la convexité à partir du tableau de variation. Ce sont de nouvelles informations décrivant la courbe.

Exercice 1. ☯

II Caractérisations pour les fonctions une fois dérivables.

Proposition 1 - Caractérisation par les variations de la fonction dérivée.

Soient :

. I un intervalle de $\mathbb{R}$,

. f une fonction définie et dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.

Remarques.

1. Nous avons une caractérisation équivalente pour la concavité : f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.
2. Avec cette caractérisation, $A \in \mathscr{C}_f$ d'abscisse a est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ si f' change de sens de variation en a.

Exercice 2. ☯

Corollaire 1 - Caractérisation par les tangentes.

Soient :

. I un intervalle de $\mathbb{R}$,

. f une fonction définie et dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

f est convexe sur I si et seulement si sa courbe représentative, $\mathscr{C}_f$, est au-dessus de toutes ses tangentes.

Démonstration

Étude du signe de $\Delta_a(x) = f(x) - \left[f'(a)(x-a) + f(a)\right]$ par tableau de variation et minimum.

■

Exemples.

1. Graphique : convexe.
2. Graphique concave.
3. Graphique un peu des deux et description par intervalles.

Remarques.

1.
2.
3. Nous avons une caractérisation équivalente pour la concavité : f est concave sur I si et seulement si sa courbe représentative, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes.
4. Avec cette caractérisation, $A \in \mathscr{C}_f$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ si la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A traverse $\mathscr{C}_f$ en A.

Exercice 3. ☯

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{x} + 1$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminez la convexité de f.
2. Déterminez une équation de la tangente au point d'abscisse 0.
3. Déduisez-en que pour tout réel x appartenant à $[-2, +\infty[$, $f(x) \geqslant x + 1$.
4. Retrouvez le précédent résultat en résolvant l'inéquation $f(x) \geqslant x + 1$.

III Caractérisation pour les fonctions deux fois dérivables.

Proposition 2 - Caractérisation par le signe de dérivée seconde.

Soient :

. I un intervalle de $\mathbb{R}$,

. f une fonction définie et dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I.

Démonstration

Démontrons que, si f'' est positive alors la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f est au-dessus de ses tangentes.

■

Exemples.

1. Exemple graphique.
2. Exemples algébriques en listant les fonctions de référence.

Remarques.

1. Nous avons une caractérisation équivalente pour la concavité : f est concave sur I si et seulement si f'' est négative sur I.
2. Avec cette caractérisation, $A \in \mathscr{C}_f$ d'abscisse a est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ si f'' s'annule en changeant de signe en a.

Exercice 4. ☯

Étudiez la convexité de la fonction

1. $f : x \mapsto x^3 - 5x^2 + 4x + 3$ sur $\mathbb{R}$.
2. $g : x \mapsto \frac{1}{2}x - \frac{3}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 5.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+9}$. Nous admettons que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f est paire.
2. Étudiez le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$.
3. Étudiez la limite de f en $+\infty$.
4. Déduisez des questions précédentes le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminez l'équation de la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f au point d'abscisse 3.
6. (a) Vérifiez que pour tout réel x, $f''(x) = \dfrac{9}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$.

   (b) Déduisez-en les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et Δ.

Exercice 6.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^6 + 3x^2 + 6$.

1. Montrez que f est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminez une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse 1.
3. Déduisez-en que pour tout réel x : $x^6 + 3x^2 + 6 \geqslant 12x - 2$

IV Inégalités.

Proposition 3 - Inégalité de Jensen.

Soient :

. i un intervalle de $\mathbb{R}$,

. f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si f est convexe sur I alors

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in [0;1],\ f\left(tx + (1-t)y\right) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y).$$

Remarques.

1. L'inégalité de Jensen comprends en fait le cas de plus de deux valeurs x_1, x_2, x_3, ...
2. Cette inégalité est souvent prise comme définition de la fonction convexe.
3. Pour une fonction concave :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in [0;1],\ f\left(tx + (1-t)y\right) \geqslant tf(x) + (1-t)f(y).$$

Corollaire 2

Si f est convexe alors $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

Exercice 7.

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Montrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{4}{x+5} \leqslant \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{5}$.
2. Déterminez une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 et déduisez-en que, pour tout nombre réel x strictement positif, $\frac{1}{x} \geqslant -\frac{x}{4} + 1$.

Exercice 8.

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x^3$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Montrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x+1)^3 \leqslant 4x^3 + 4$.
2. Déterminez une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 et déduisez-en que, pour tout nombre réel x, $x^3 \geqslant 3x - 2$.
3. h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 5.$$

En utilisant l'inégalité précédente, montrez que la fonction h est croissante sur $[0, +\infty[$.

Correction de l'exercice 8

1. $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$ donc pour $y = 1$, $\left(\frac{x+1}{2}\right)^3 \leqslant \frac{x^3+1^3}{2}$.
2. $f'(1) = 3$, $f(1) = 1$, $y = 3x + 2$.
3. $h'(x) = x^3 - 3x + 2$.

V Exercices.

Exercice 9. ⚽

On appelle « satisfaction » toute fonction dérivable qui prend des valeurs comprises entre 0 et 100.
Lorsque la fonction « satisfaction » atteint 100 on dit qu'il y a « saturation ».
On définit aussi la fonction « envie » comme la fonction dérivée de la fonction « satisfaction ».
La direction des ressources humaines d'une entreprise modélise la satisfaction d'un salarié en fonction du salaire annuel qu'il perçoit. On admet que la fonction satisfaction h est définie sur $[10; 50]$ par :

$$h(x) = \frac{90}{1 + \mathrm{e}^{-0,25x+6}};$$

où x est exprimé en milliers d'euros.
On note $\mathscr{C}_h$ la courbe représentative de la fonction h.

1. Par lecture graphique sur votre calculatrice conjecturez la convexité de la fonction h ainsi que le sens de variation de la fonction « envie ». Donnez-en une interprétation.
2. D'après ce modèle serait-il possible d'atteindre la saturation ?
3. Vérifiez que pour tout $x \in [10; 50]$:
$$h''(x) = \frac{5{,}625\mathrm{e}^{-0,25x+6}\left(\mathrm{e}^{-0,25x+6} - 1\right)}{\left(1 + \mathrm{e}^{-0,25x+6}\right)^3}.$$
4. Déduisez-en la convexité de la fonction h.
5. À partir de quel salaire annuel peut-on estimer que la fonction « envie » décroît ?

Correction de l'exercice 9

1. Satisfaction convexe puis concave point. Envie croissante puis décroissante.
2. Limite de 90 donc pas de saturation possible.
3.
4. $\mathrm{e}^{-0,25x+6} - 1 \geqslant 0 \iff x \leqslant 24$.
5. À partir d'un salaire de 24 000 euros.