

Limites de fonctions.

Étude d'une fonction, étude des limites.

Voisinage d'une valeur a .

Définition de la limite d'une fonction en a .

Définition de la limite d'une fonction en a par valeurs inférieures ou supérieures.

Interprétation géométrique des limites finies en l'infini.

Interprétation géométrique des limites infinies en un réel.

Exemples de référence.

Opérations sur les limites.

Lever l'indétermination : expressions polynomiales et fractions rationnelles.

EXERCICE 1. Soit f une fonction polynomiale de degré 3. Étudiez les limites de f à l'infini.

EXERCICE 2. Déterminez les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction f dans les cas suivants.

- | | |
|--|--|
| a) $f : x \mapsto -2x^7 + 4x^3 + x.$ | b) $f : x \mapsto x^3 + 4x^2 - x^4.$ |
| c) $f : x \mapsto \frac{2x^4 - 3x^3 + x^2 + x + 1}{7x^{32} - 13x^{17} + x + 2}.$ | d) $f : x \mapsto \frac{2x^3 + 10x^2 + x}{2x^5 - x^{12} + x^3 + 1}.$ |
| e) $f : x \mapsto \frac{7x^{32} - 13x^{17} + x + 2}{-3x^{32} + x + \pi}.$ | f) $f : x \mapsto \frac{2x^5 - x^{12} + x^3 + 1}{2x^4 + x^4 + x^7}.$ |

Lever une indétermination : factoriser pour faire apparaître une croissance comparée.

EXERCICE 3. Déterminez les limites suivantes.

- | | | |
|---|---|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3xe^x + 2e^x - 1.$ | b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - e^2x - x^3e^x.$ | c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{4e^x}{x}.$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{e^x}{2x^2}.$ | e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{4e^x}{\sqrt[3]{x}}.$ | f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}e^x}{x}.$ |
| g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{e^x}.$ | h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - 3x}{e^x}.$ | i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x - 1)e^x.$ |
| j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x + 3)e^x.$ | k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x - e^x.$ | l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - 2e^x.$ |
| m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - xe^x.$ | n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)e^x.$ | |

Limites et compositions.

EXERCICE 4. Déterminez les limites suivantes.

- | | | |
|--|--|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 + 3}.$ | b) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{1-0,5x}.$ | c) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (5 - x)^3.$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{(x^2 + x + 1)^4}.$ | e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3x-2}.$ | f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2 + x + e^{-x}}.$ |
| g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+x+1}.$ | h) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{\frac{2}{x}}.$ | i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - 3e^{2x})^5.$ |
| j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{4x^2 + 1}}.$ | k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3xe^{3x}.$ | l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x)e^{2-x}.$ |

Théorème du point fixe.

EXERCICE 5. Soient (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n où f est la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$.

1. Justifiez que (u_n) est bien définie.
2. Étudiez les variations de f sur $[1; +\infty[$.
3. Montrez que la suite (u_n) est convergente.
4. Déterminez la limite de (u_n) .

EXERCICE 6. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n^2$.

1. Si (u_n) converge quelles sont les valeurs possibles de sa limite ℓ ?
2. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 3$.
3. Étudiez le sens de variation de la suite (u_n) .
4. Prouvez que (u_n) converge et précisez sa limite.

EXERCICE 7. On considère la suite définie par $u_{n+1} = u_n^2 - u_n - 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1$. Si la suite converge quelle peut être sa limite ?

EXERCICE 8. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$. On admet que f est strictement croissante sur $[0; 1]$.

1. Montrez que pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x)$ appartient à $[0; 1]$.
2. Soit D la droite d'équation $y = x$.

(a) Montrez que $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$ où $g(x)$ est à déterminer.

(b) Du sens de variation de g déduire le signe de $g(x)$ sur $[0; 1]$.

(c) Déduisez-en la position relative de D et de la courbe $\mathcal{C}$ représentant f .

3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Donnez une représentation graphique de $\mathcal{C}$ et D puis dessinez les quatre premiers termes de la suite (u_n) .

(b) Montrez que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 1$ et $u_n \leq u_{n+1}$.

(c) Déduisez-en que (u_n) converge et précisez sa limite.

Exercices.

EXERCICE 9. Soit f la fonction définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{4}\right\}$ par $f(x) = \frac{2x+3}{4x+3}$.

1. Déterminez les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Construisez le tableau de variation de f .

EXERCICE 10. On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 \geq 4$ et $u_{n+1} = \sqrt{4 + u_n} - 2$ pour $n \geq 0$.

1. Montrez que u_n est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrez que si la suite (u_n) a une limite, cette limite est zéro.
3. Montrez que, pour $n \geq 1$, on a $u_n \geq -2$.
4. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - u_{n+1}$ a le même signe que u_n .
5. On suppose ici que $u_0 = 1$. Établissez que la suite (u_n) est monotone. A-t-elle une limite et si oui laquelle ?

EXERCICE 11. Soit la suite numérique (u_n) définie par $u_0 \in [0; 1]$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$ pour tout entier naturel n .

1. montrez que pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq u_n \leq 1$.
2. Montrez que (u_n) est croissante.
3. Déduisez-en quelle admet une limite que vous calculerez.
4. On pose $u_0 = \cos(\varphi)$ où $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Montrez par récurrence que $u_n = \cos(\frac{\varphi}{2^n})$. Retrouvez les résultats du 3.

EXERCICE 12. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n}$.

1. Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm, dessinez la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 5 - \frac{4}{x}$ et la droite Δ d'équation $y = x$. Vous préciserez les points communs à ces deux courbes.
2. Étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - (a) Montrez par récurrence que u_n est bien définie pour tout n et vérifie $1 < u_n < 4$.
 - (b) Montrez que la suite (u_n) est croissante.
 - (c) Déduisez-en le comportement de la suite (u_n) pour n tendant vers $+\infty$ et calculez éventuellement sa limite.
3. Représentez les quatre premiers termes de la suite (u_n) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ sur l'axe $(O; \vec{i})$, à l'aide de $\mathcal{C}$ et de Δ .

EXERCICE 13. *Bac série C et E 1988. Besançon, Dijon, Lyon, Grenoble, Nancy-Metz, Reims, Strasbourg.* On se propose d'étudier la suite (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ pour tout entier n de $\mathbb{N}$ puis la convergence de la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{p=0}^n u_p$, pour tout entier n .

1.
 - (a) Montrez que pour tout entier n , u_n est positif.
 - (b) Montrez que la suite (u_n) est décroissante.
 - (c) Déduisez-en qu'elle converge et trouvez sa limite.
2. Montrez que pour tout entier n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{-S_n}$ et déduisez-en que S_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini.

EXERCICE 14. *Bac série C 1068. Pondichéry.* On considère l'application qui, au nombre réel x , fait correspondre le nombre réel $f(x) = \sqrt{x(x-3)^2}$. Étudiez la fonction f , construisez son graphe dans un repère orthonormé. Quelle particularité présente ce graphe au point d'abscisse 3 ?