Limites de fonctions.

Nous avons déjà vu des limites celles de suites. Avec les fonctions la variété des situation est beaucoup plus importante. La variable d'une suite est un entier naturel il ne peut que tendre indéfiniment vers $+\infty$. Pour une variable x nous pourrons nous rapproché indéfiniment d'un réel (par la droite ou par la gauche), ou tendre vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Étude d'une fonction, étude des limites.

Dorénavant lorsqu'on vous demandera d'étudier une fonction il faudra étudier ses limites aux bornes ouvertes du domaines de définition.

Exemples.

1. L'étude d'une fonction f définie sur $]-1;2[\cup[3,+\infty[$ nécessitera la détermination de $\lim_{x\to-1} f(x)$, $\lim_{x\to2} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Remarques.

1. Nous nous ferons désormais un devoir de compléter les tableaux de variations par les limites. Ainsi :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto x^2$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
$x \mapsto x^3$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Voisinage d'une valeur a.

Soit $a \in \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$. Ainsi a peut être un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Nous nous intéresserons à la limite de la quantité $f(x)$ lorsque x se rapproche de a où a peut être un nombre ou un infini. Si $a \in \mathbb{R}$ nous appellerons *voisinage ouvert de a* tout intervalle ouvert contenant a. Nous appellerons *voisinage ouvert de $+\infty$* tout intervalle de la forme $]A,+\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$. Nous appellerons *voisinage ouvert de $-\infty$* tout intervalle de la forme $]-\infty,A[$ où $A \in \mathbb{R}$. Le voisinage est un outil pour définir les limites de fonctions.

Exemples.

1. $]-1{,}2;0{,}5[$ est un voisinage ouvert de 0 par contre $]2;4[$ n'en n'est pas un.
2. $]1;4[$ est un voisinage ouvert de π.
3. $]2;3[$ est un voisinage ouvert de e.
4. $]-\infty,4[$ est un voisinage ouvert de $-\infty$.
5. $\mathbb{R}$ est un voisinage ouvert de n'importe quel nombre, de $+\infty$ et de $-\infty$.

Définition de la limite d'une fonction en a.

Définition 1. Soient $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathscr{D} \cup \{+\infty,-\infty\}$, $\ell \in \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$, $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ une application. Nous dirons que f *admet ℓ pour limite en a* si et seulement si, quelque soit le voisinage ouvert J de ℓ, il existe un voisinage ouvert I de a tel que : $\forall x \in I,\ f(x) \in J$.

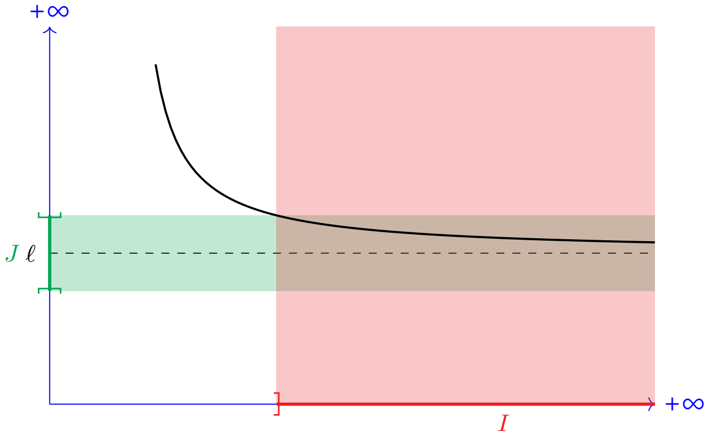
Remarques.

1. Une application est une fonction dont le domaine de définition coïncide avec l'ensemble de départ.
2. Si f admet ℓ pour limite en a alors nous noterons $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ ou encore $\lim_a f = \ell$.

3. Voici une visualisation de cette définition avec Geogebra.

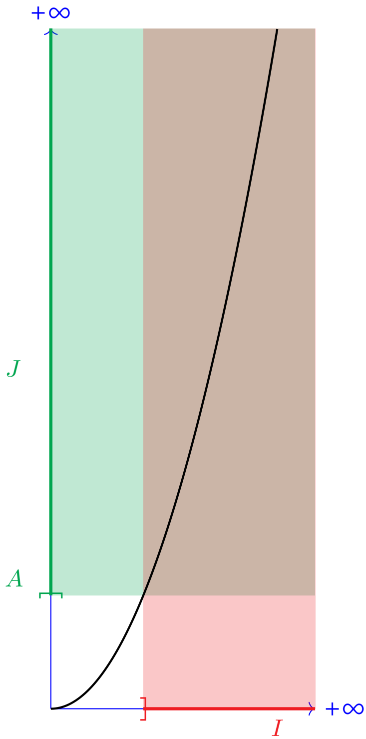
Exemples.

1. Au voisinage de $a = +\infty$, $f(x)$ semble...



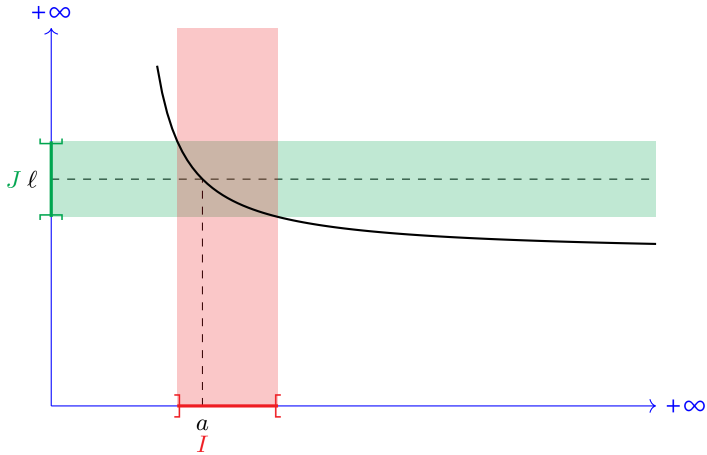
... se rapprocher de $\ell \in \mathbb{R}$.
Quel que soit le voisinage ouvert, $J =]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$, de ℓ, il existe un voisinage I, de $+\infty$, tel que : $\forall x \in I$, $f(x) \in J$.

2. Au voisinage de $a = +\infty$, $f(x)$ semble...



... augmenter sans limitation, $f(x)$ tend vers $+\infty$.
Quel que soit le voisinage ouvert, $J =]A, +\infty[$, de $+\infty$, il existe un voisinage I, de $+\infty$, tel que : $\forall x \in I$, $f(x) \in J$.

3. Au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, $f(x)$ semble...



... se rapprocher de $\ell \in \mathbb{R}$.
Quel que soit le voisinage ouvert, $J =]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$, de ℓ, il existe un voisinage I, de a, tel que : $\forall x \in I$, $f(x) \in J$.

Définition de la limite d'une fonction en a par valeurs inférieures ou supérieures.

Pour l'instant, si la fonction étudiée est définie sur $]0, +\infty[$ nous avons défini la limite en $+\infty$ mais pas celle en 0. Cependant faire tendre x vers 0 pose problème car nous ne trouverons pas d'intervalle ouvert contenant 0 et qui soit inclus dans $]0, +\infty[$. Nous devons adapter la définition pour indiquer que nous ne considérons que de x supérieurs à 0.

Définition 2. Soient $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ une application. Nous dirons que f *admet ℓ pour limite à gauche en a* si et seulement si, quelque soit le voisinage ouvert J de ℓ, il existe un voisinage ouvert I de a tel que : $\forall x \in]-\infty, a[\cap I \cap \mathscr{D}$, $f(x) \in J$.

Remarques.

1. On définit de même la *limite à droite en a* : f admet ℓ pour limite à droite en a si et seulement si, quelque soit le voisinage ouvert J de ℓ, il existe un voisinage ouvert I de a tel que : $\forall x \in]a, +\infty[\cap I$, $f(x) \in J$.
2. Au lieu de dire « limite à droite » nous dirons parfois « *limite par valeurs supérieures* » et au lieu de « limite à gauche » nous dirons tout aussi bien « *limite par valeurs inférieures*.
3. Si f admet ℓ pour limite à droite en a on note : $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x > a}}{\longrightarrow} \ell$ ou $\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell$. Cette dernière notation est incorrecte mais observable.
4. Si $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \pm\infty$ alors, pour décrire la situation graphique, nous dirons que $\mathscr{C}_f$, *la courbe représentative de f admet une asymptote verticale en a*, ou encore que $\mathscr{C}_f$ *admet une asymptote d'équation $x = a$*.
5. Les résultats précédemment vus sur les limites restent valables pour ces limites à gauche et à droite.

Interprétation géométrique des limites finies en l'infini.

Définition 3. Soient $\ell \in \mathbb{R}$, f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. Nous dirons que *la droite $y = \ell$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$* (respectivement en$-\infty$) si et seulement si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (resp. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$).

Remarques.

1. Autrement dit si f admet une limite fini en $\pm\infty$ alors la courbe représentative de f, à l'infini semble se confondre avec la droite d'équation $y = \ell$.

Interprétation géométrique des limites infinies en un réel.

Définition 4. Soient $a \in \mathbb{R}$, f une fonction définie au voisinage de a. Nous dirons que *la droite $x = a$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$* si et seulement si $\lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = \pm\infty$.

Remarques.

1. Autrement dit si f admet une limite infini en un réel a alors la courbe représentative de f, à l'abscisse a semble monter $(+\infty)$ ou descendre $(-\infty)$ jusqu'à se confondre avec la droite d'équation $x = a$.
2. On obtient, éventuellement, des asymptotes au bornes ouvertes du domaine de définition. Ainsi $x \mapsto \frac{1}{x-2}$ qui est définie sur $]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$ est susceptible d'avoir une asymptote vertical en 2 (ici il faudra considérer limites à gauche et à droite).

Exemples de référence.

Nous avons avec les suites vu la plupart des situations de limites à connaître avec les fonctions. Ainsi $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x$ se retrouve par analogie avec $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n$. De même $\lim_{x\to0} x(x^2-1)$ se retrouve avec $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 - 1\right)$

Proposition 1. Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

(i) $\lim_{x\to+\infty} x^m = +\infty$. Si m est pair alors : $\lim_{x\to-\infty} x^m = +\infty$. Si m est impair alors : $\lim_{x\to-\infty} x^m = -\infty$.

(ii) $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.

(iii) $\lim_{\substack{x\to0 \\ x>0}} \ln(x) = -\infty$. $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

(iv) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

(v) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^m} = 0$. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^m} = 0$.

(vi) $\lim_{\substack{x\to0 \\ x>0}} \frac{1}{x^m} = +\infty$. Si m est pair alors $\lim_{\substack{x\to0 \\ x<0}} \frac{1}{x^m} = +\infty$. Si m est impair alors $\lim_{\substack{x\to0 \\ x<0}} \frac{1}{x^m} = -\infty$.

Opérations sur les limites.

Proposition 2. - Limites et additions. Soient $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathscr{D} \cup \{+\infty, -\infty\}$, $m,\ell \in \mathbb{R}$, $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ des applications.

Limites de la fonction $f+g$ en a :

f \ g	ℓ	$+\infty$	$-\infty$.
m	$m+\ell$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**?**
$-\infty$	$-\infty$	**?**	$-\infty$

Limites de la fonction $f \times g$ en a :

f \ g	$\ell > 0$	$\ell = 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$m > 0$	$m\ell$	0	$m\ell$	$+\infty$	$-\infty$
$m = 0$	0	0	0	**?**	**?**
$m < 0$	$m\ell$	0	$m\ell$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	**?**	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	**?**	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Limites de la fonction $\frac{1}{f}$ en a (0^+ symbolise le fait que f tend vers 0 mais que de plus f prend des valeurs positives au voisinage de a, tandis 0^- signifie que f tend vers 0 mais en prenant des valeurs négatives) :

f	$\ell \neq 0$	$\ell = 0$	$\ell = 0^+$	$\ell = 0^-$	$+\infty$	$-\infty$
$\frac{1}{f}$	$\frac{1}{\ell}$	**?**	$+\infty$	$-\infty$	0	0

Limites de la fonction $\frac{f}{g}$ en a :

f \ g	$\ell > 0$	$\ell = 0^+$	$\ell = 0^-$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$m > 0$	$\frac{m}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{m}{\ell}$	0	0
$m = 0$	0	**?**	**?**	0	0	0
$m < 0$	$\frac{m}{\ell}$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{m}{\ell}$	0	0
$+\infty$	$+\infty$	**?**	**?**	$-\infty$	**?**	**?**
$-\infty$	$-\infty$	**?**	**?**	$+\infty$	**?**	**?**

Exemples.

1. $x^4 + \ln(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. Nous ne pouvons pas donner la limite de $x \mapsto e^x - \ln(x)$ en $+\infty$ car il s'agit d'une forme indéterminée $(+\infty - (+\infty))$.
3. La recherche de limite de $f(x) = \frac{1}{x} \times e^x$ en $+\infty$ conduit à une forme indéterminée $(0 \times (+\infty))$.
4. Recherchons l'éventuelle limite de $x \mapsto x^3 \ln(x)$ en $+\infty$.
$$\left\{ \begin{array}{l} \ln(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \\ x^3 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{array} \right. ,$$
donc
$$\boxed{x^3 \ln(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$
5. Recherchons l'éventuelle limite de $x \mapsto 4x^2 - 3x + 1$ en $-\infty$.
Par combinaison linéaire $(4 \times (+\infty) - 3 \times (-\infty) + 1)$:

$$4x^2 - 3x + 1 \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

6. La recherche de limite de $x \mapsto x^2 - x$ en $+\infty$ conduit à une forme indéterminée $(+\infty - (\infty))$: nous ne pouvons conclure quant à la limite de la fonction en $+\infty$.

Remarques.

1. Il faudra surtout retenir les formes indéterminées qui sont les situations appelant une étude plus poussée dans les exercices. Schématiquement les formes indéterminées sont : $+\infty + (-\infty)$, $0 \times \infty$, $\frac{\cdot}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemples.

1. $\frac{1}{\sqrt{x}+3} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. $\frac{2}{x+1} + \frac{1}{\mathrm{e}^x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. $x^3 h \frac{4}{x^2+x2} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

En combinant inverse et produit nous obtenons de nouveaux résultats sur les limites de fonctions.

Lever l'indétermination : expressions polynomiales et factions rationnelles.

Un polynôme est une expression algébrique formée d'une somme de monôme, c'est-à-dire d'expression ax^n (avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$). Le degré du monôme ax^n est la puissance n.

Dans des expressions polynomiales la factorisation par le monôme dominant permet de lever les indéterminations (de la forme $+\infty - (+\infty)$) en $\pm\infty$.

Exemples.

1. On cherche à déterminer la limite éventuelle de $P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 5x + 1$ en $+\infty$.
   On essaye d'abord de passer à la limite directement : c'est une combinaison linéaire de fonctions de référence est l'on obtient schématiquement : $-2 \times (+\infty) + 4 \times (+\infty) + 5 \times (+\infty) + 1$.
   Il s'agit d'une forme indéterminée « $+\infty + (-\infty)$ ».
   Alors nous factorisons par le monôme dominant $-2x^3$.

$$\begin{aligned} P(x) &= -2x^3 \left(\frac{-2x^3}{-2x^3} + \frac{4x^2}{-2x^3} + \frac{5x}{-2x^3} + \frac{1}{-2x^3} \right) \\ &= -2x^3 \left(1 - 2 \times \frac{1}{x} - \frac{2}{5} \times \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^3} \right) \end{aligned}$$

   Or : $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} 1 - 2 \times \frac{1}{x} - \frac{2}{5} \times \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^3} = 1 \\ \lim_{x \to +\infty} -2x^3 = -\infty \end{cases}$ donc, par produit : $\lim_{x \to +\infty} P(x) = -\infty$.
2. Soit $F(x) = \frac{4x^3+2x}{3x^7+1}$. Forme indéterminée mais $F(x) = \frac{4x^3\left(1+\frac{1}{2x^2}\right)}{3x^7\left(1+\frac{1}{2x^7}\right)} = \frac{4}{3x^4} \times \frac{1+\frac{1}{2x^2}}{1+\frac{1}{2x^7}}$. Or $\lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{2x^2} = 1$ et $\lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{2x^7} = 1$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{4}{3x^4} = 0$ donc par produit : $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

EXERCICE 1. Soit f une fonction polynomiale de degré 3. Étudiez les limites de f à l'infini.

EXERCICE 2. Déterminez les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction f dans les cas suivants.

a) $f : x \mapsto -2x^7 + 4x^3 + x$.

b) $f : x \mapsto x^3 + 4x^2 - x^4$.

c) $f : x \mapsto \dfrac{2x^4 - 3x^3 + x^2 + x + 1}{4x^3 + 2x + 7}$.

d) $f : x \mapsto \dfrac{2x^3 + 10x^2 + x}{x^{12} + 1}$.

e) $f : x \mapsto \dfrac{7x^{32} - 13x^{17} + x + 2}{-3x^{32} + x + \pi}$.

f) $f : x \mapsto \dfrac{2x^5 - x^3 + x^6}{2x^4 + x^4 + x^7}$.

Lever une indétermination : factoriser pour faire apparaître une croissance comparée.

Nous retrouvons les mêmes résultats de croissances comparées, au voisinage de $+\infty$, qu'avec les suites que nous ne répéterons pas. Indiquons de nouveaux résultats.

Proposition 3.

(i) $\lim_{x\to-\infty} x^n \mathrm{e}^x = 0$.

(ii) $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x^n \ln(x) = 0$.

EXERCICE 3. Déterminez les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x - 1$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \mathrm{e}^2 x - x^3\mathrm{e}^x$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \dfrac{4\mathrm{e}^x}{x}$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{\mathrm{e}^x}{2x^2}$.

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{4\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}}$.

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}\mathrm{e}^x}{x}$.

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x}{\mathrm{e}}$.

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5-3x}{\mathrm{e}^x}$.

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} (5x-1)\mathrm{e}^x$.

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 + x + 3)\mathrm{e}^x$.

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x - \mathrm{e}^x$.

l) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 - 2\mathrm{e}^x$.

m) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x\mathrm{e}^x$.

n) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^x - x)\mathrm{e}^x$.

Limites et compositions.

Proposition 4. Soient $\mathscr{D}_f \subset \mathbb{R}$, $\mathscr{D}_g \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathscr{D}_f \cup \{+\infty, -\infty\}$, $b \in \mathscr{D}_g \cup \{+\infty, -\infty\}$, $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ et $g : \mathscr{D}_g \to \mathbb{R}$ des applications telles que $f\left(\mathscr{D}_f\right) \subset \mathscr{D}_g$.

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b \\ \\ g(y) \xrightarrow[y\to b]{} \ell \end{cases} \Rightarrow g \circ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell..$$

Remarques.

1. On peut se représenter la chose comme un passage à la limite dans la fonction g :
$$\lim_{x\to a} g \circ f(x) = \lim_{x\to a} g\left[f(x)\right] = g\left[\lim_{x\to a} f(x)\right] = g(b).$$
2. Ce résultat permet parfois de lever l'indétermination pour les fonctions dont l'expression fait intervenir des fonctions imbriquées (composition) les unes dans les autres.

Exemples.

1. $h : x \mapsto \mathrm{e}^{-x+1}$ n'est pas une fonction de référence, mais n'est pas non plus une somme, ou un produit, ou un quotient, de fonctions de références. Nous étions pour l'instant impuissant à traiter cette situation.
Mais en notant $f : x \mapsto -x + 1$ et $g : x \mapsto \mathrm{e}^x$ nous remarquons que $h = g \circ f$ où g et f sont des fonctions de références (ou au moins des sommes, produits quotients de fonctions de référence).
Étudions la limite de h en $+\infty$.

$$\left\{\begin{array}{l} -x+1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \\ \\ e^y \underset{y\to-\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array}\right. \Rightarrow e^{-x+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$$\boxed{\lim_{+\infty} h = 0.}$$

EXERCICE 4. Déterminez les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2+3}$.

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{1-0,5x}$.

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (5-x)^3$.

d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{(x^2+x+1)^4}$.

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{3x-2}$.

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2+x+e^{-x}}$.

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2+x+1}$.

h) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} e^{\frac{2}{x}}$.

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} (2-3e^{2x})^5$.

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x^2-1}{4x^2+1}}$.

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3xe^{3x}$.

l) $\lim\limits_{x\to+\infty} (2-x)e^{2-x}$.

Théorème du point fixe.

Proposition 5. Soient $p \in \mathbb{N}$, $(u_n)_{n\geqslant p}$ une suite définie par une formule de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ quelque soit $n \geqslant p$, avec f une fonction admettant une limite en ℓ. Alors : $\ell = f(\ell)$.

Remarques.

1. Pour une suite définie par récurrence nous sommes maintenant capable de donner une équation vérifiée par la limite. Nous avons donc une méthode pour trouver cette limite.
2. Nous retiendrons que, pour peut que cela ait du sens (notamment qu'il y a effectivement des limites), il est possible de passer à la limite de la suite dans la fonction.

   Schématiquement : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right)$.

EXERCICE 5. Soient (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n où f est la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$.

1. Justifiez que (u_n) est bien définie.
2. Étudiez les variations de f sur $[1;+\infty[$.
3. Montrez que la suite (u_n) est convergente.
4. Déterminez la limite de (u_n).

EXERCICE 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n^2$.

1. Si (u_n) converge quelles sont les valeurs possibles de sa limite ℓ ?
2. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.
3. Étudiez le sens de variation de la suite (u_n).
4. Prouvez que (u_n) converge et précisez sa limite.

1. $x = \frac{1}{4}x^2 \Leftrightarrow x \in \left\{0; \frac{1}{4}\right\}$.
2. $f : x \mapsto \frac{1}{4}x^2$ est croissante sur $[0;3]$ et $f(0) = 0$ et $f(3) = \frac{9}{4} \leqslant 3$.
3. f est croissante et $u_0 \geqslant u_1 = \frac{9}{4}$ donc décroissante.
4. Converge vers 0 car décroissante et $u_1 < 3$.

EXERCICE 7. On considère la suite définie par $u_{n+1} = u_n^2 - u_n - 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1$. Si la suite converge quelle peut être sa limite ?

EXERCICE 8. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x}$. On admet que f est strictement croissante sur $[0;1]$.

1. Montrez que pour tout $x \in [0;1]$, $f(x)$ appartient à $[0{,}1]$.
2. Soit D la droite d'équation $y = x$.
   (a) Montrez que $f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{\mathrm{e}^x - x}$ où $g(x)$ est à déterminer.
   (b) Du sens de variation de g déduire le signe de $g(x)$ sur $[0;1]$.
   (c) Déduisez-en la position relative de D et de la courbe $\mathscr{C}$ représentant f.
3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Donnez une représentation graphique de $\mathscr{C}$ et D puis dessinez les quatre premiers termes de la suite (u_n).
   (b) Montrez que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ et $u_n \leqslant u_{n+1}$.
   (c) Déduisez-en que (u_n) converge et précisez sa limite.

Exercices.

EXERCICE 9. Soit f la fonction définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{4}\right\}$ par $f(x) = \frac{2x+3}{4x+3}$.

1. Déterminez les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Construisez le tableau de variation de f.

EXERCICE 10. *Bac série C et E 1988. Besançon, Dijon, Lyon, Grenoble, Nancy-Metz, Reims, Strasbourg.* On se propose d'étudier la suite (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n}$ pour tout entier n de $\mathbb{N}$ puis la convergence de la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$, pour tout entier n.

1. (a) Montrez que pour tout entier n, u_n est positif.
   (b) Montrez que la suite (u_n) est décroissante.
   (c) Déduisez-en qu'elle converge et trouvez sa limite.
2. Montrez que pour tout entier n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{e}^{-S_n}$ et déduisez-en que S_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini.

EXERCICE 11. *Bac série C 1068. Pondichéry.* On considère l'application qui, au nombre réel x, fait correspondre le nombre réel $f(x) = \sqrt{x(x-3)^2}$. Étudiez la fonction f, construisez son graphe dans un repère orthonormé. Quelle particularité présente ce graphe au point d'abscisse 3 ?