Fonction logarithme népérien.

Point de départ l'exponentielle.

Logarithme népérien, propriétés algébriques.

EXERCICE 1. Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $2e^{x}-3=0$. b) $e^{-x+1}-1=0$. c) $e^{2x}=4$.
d) $(2e^{x}-1)(e^{x}+5)=0$. e) $-5e^{x}-10=0$. f) $7-e^{5x-2}=0$.
g) $e^{-3x}-1=0$. h) $e^{x}(e^{x}-9)=0$. i) $e^{2x}+3e^{x}=0$.

EXERCICE 2. Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $\ln(x)=3$. b) $\ln(x)=-7$.
c) $2\ln(x)-1=0$. d) $(\ln(x)+5)(4\ln(x)-5)=0$.
e) $(\ln(x))^2=9$. f) $\ln(x)=-5$.
g) $-6\ln(x)+3=0$. h) $\ln(x)(2\ln(x)-7)=0$.
i) $(\ln(x))^2-\ln(x)=0$. j) $(\ln(x))^3-2(\ln(x))^2=0$.

EXERCICE 3. Déterminez l'ensemble (le domaine) de définition de la fonction f dans les cas suivants.

a) $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x}\right)$. b) $f(x)=\ln(x+1)$.
c) $f(x)=\ln\left(\frac{3x-1}{4x+11}\right)$. d) $f(x)=\ln\left(\frac{2}{3}x+\frac{9}{7}\right)$.
e) $f(x)=\ln(x^2)$. f) $f(x)=\ln((x-2)(3x-4))$.
g) $f(x)=\ln(e^{x}-1)$. h) $f(x)=\ln(2x^2-3x+1)$.
i) $f(x)=\ln(x+1)+\ln(x^2-4)$.

Propriétés algébriques.

EXERCICE 4. Simplifiez les nombres suivants pour les écrire en fonction de $\ln(3)$ uniquement.

a) $\ln(9)$. b) $\ln\left(\frac{1}{3}\right)$. c) $\ln(3\sqrt{3})$. d) $\ln(36)-2\ln(2)$.

EXERCICE 5. Simplifiez les nombres suivants pour les écrire en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(5)$ uniquement.

a) $\ln(10)-\ln\left(\frac{1}{4}\right)$. b) $\ln(0{,}05)$. c) $\ln\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$. d) $2\ln\left(5e^{2}\right)+\ln\left(4e^{-1}\right)$.

EXERCICE 6. Simplifiez les expressions suivantes.

a) $A=\ln\left(e^{4}\right)+3\ln\left(e^{-1}\right)$. b) $B=e^{2\ln(5)}-\ln\left(\left(e^{5}\right)^2\right)$. c) $C=\ln\left(e^{-3}\right)\times\ln\left(e^{3}\right)$.
d) $D=20\ln(\sqrt{e})-e^{3\ln(3)}$.

EXERCICE 7. Déterminez la valeur exacte de $S=\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\ln\left(\frac{3}{4}\right)+\cdots+\ln\left(\frac{49}{50}\right)$.

EXERCICE 8. Démontrez que

a) $\forall x\in\mathbb{R},\ \ln\left(1+e^{-x}\right)=-x+\ln\left(1+e^{x}\right)$.
b) $\forall x>-1,\ 2\ln(x+1)=\ln(x^2+2x+1)$.
c) $\forall x\in\mathbb{R},\ \ln\left(1+e^{-2x}\right)=-2x+\ln\left(1+e^{2x}\right)$.

EXERCICE 9. Déterminez les ensembles de définition des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \ln(3x-7)$. b) $g(x) = \ln(-x^2+4x-3)$. c) $h(x) = \ln(x)-3\ln(2-x)$.

EXERCICE 10. Résolvez les équations suivantes après avoir déterminé l'ensemble sur lequel on peut les résoudre.

a) $\ln(x) = \ln(x+2)$.
b) $\ln(-x+3) = \ln(3x+5)$.
c) $\ln(2x^2+4) = \ln(-5x+1)$.
d) $\ln(x^2) = \ln(x)+\ln(6)$.
e) $\ln(x+1)+\ln(x-4) = \ln(5)$.
f) $2\ln(x) = \ln(5x-3)$.
g) $\ln[(x-3)(2x+1)] = \ln(4)$.
h) $\ln(x-3)+\ln(2x+1) = 3\ln(2)$.

EXERCICE 11. Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $[\ln(x)]^2 - 2\ln(x) - 3 = 0$.
b) $4[\ln(x)]^2 - \ln\left(\frac{1}{x}\right) - 3 = 0$.
c) $4e^{2x} + 7e^x - 2 = 0$.
d) $\ln(-x) = \ln\left(x^2-1\right)$.
e) $\ln(2-e^x) - \ln(2e^x-1) = 0$.
f) $\ln(4)+\ln(x-1) = 2\ln(x)$.
g) $\left(2x^2+3x-6\right)\ln(1-x) = 0$.
h) $\ln(e^x-1)+\ln(e^x+1) = 1+\ln(2)$.
i) $\ln(x+1)-\ln(x) = 2\ln(3)$.

Monotonie.

Signe.

EXERCICE 12. Résolvez les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

a) $\ln(x) < 3$. b) $2\ln(x)+200 > 0$. c) $1-2\ln(x) \geqslant 0$. d) $2\ln(x)-4\ln(3) < 0$.

EXERCICE 13. L'évolution d'une population d'animaux en fonction du temps est modélisée par la fonction P définie par $P(t) = 50e^{\frac{t}{2}}$, où t est exprimé en années.

1. Au bout de combien d'années la population initiale aura-t-elle été multipliée par 2 ?
2. Au bout de combien d'année la population dépassera-t-elle les 10 000 individus ?

EXERCICE 14. Déterminez le plus petit entier naturel n tel que

a) $0{,}99^n \leqslant 10^{-30}$. b) $1{,}02^n > 10^{2024}$.

EXERCICE 15. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 1{,}001$. Déterminez s'il existe un plus petit entier naturel n tel que $u_n > 100\,000$.

EXERCICE 16. Résolvez les inéquations suivantes après avoir déterminé sur quel ensemble on peut le résoudre.

a) $\ln(3x-4) < 0$. b) $\ln(-x+3) \geqslant 1$. c) $\ln(-x+1)\ln(x)$.
d) $\ln(3+2x) < \ln(x-3)$.

EXERCICE 17. Résolvez les inéquations suivantes.

a) $\ln(x+1) > 0$. b) $\dfrac{\ln(x)-1}{x^2+1} > 0$. c) $\dfrac{\ln(x)}{x^2-3x+2} > 0$.
d) $[\ln(x)]^2 - 5\ln(x) + 4 < 0$.

Régularité.

Convexité.

Limites.

EXERCICE 18. Déterminez la limite en a des fonctions f et g suivantes.

a) $f(x) = 2\left[\ln(x)\right]^2 + 3\ln(x) + 1$ avec $a = +\infty$.
b) $g(x) = -\left[\ln(x)\right]^2 + \ln(x)$ avec $a = 0$.

Fonctions composées avec ln.

Croissances comparées.

EXERCICE 19. Déterminez la limite en a des fonctions f et g suivantes définies sur $]0;+\infty[$.

1. $f(x) = \left(e^x - 1\right)\left(1 - \ln(x)\right)$ avec $a = +\infty$.
2. $g(x) = \dfrac{\ln(x) - 1}{x}$ avec $a = 0$.

EXERCICE 20. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{2x+1}$.

1. Déterminez la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.
2. (a) Vérifiez que pour tout réel $x > 0$: $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x} \times \dfrac{1}{2 + \frac{1}{x}}$.
   (b) Déduisez-en la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. interprétez graphiquement les résultats précédents.

EXERCICE 21. a et b étant deux nombres réels donnés, on considère la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = a + b\frac{\ln(x)}{x}$.

Sachant que $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale $\mathscr{D}$ d'équation $y = 1$ et une tangente $\mathscr{T}$ au point d'abscisse 1 d'équation $y = -x + 2$, déterminez les valeurs de a et b.

Exercices.

EXERCICE 22. On détermine le pH d'une solution en mesurant la concentration en ions H_3O^+, par exemple à l'aide d'un pH-mètre.

Le pH est défini par la relation $\text{pH} = -\log\left[H_3O^+\right]$, où $\left[H_3O^+\right]$ est la concentration en $\text{mol}\cdot L^{-1}$ d'ions H_3O^+ de la solution.

On rappelle que $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$ pour tout réel $x > 0$.

1. Quel est le ph d'une solution dont la concentration en ions H_3O^+ est de $10^{-6,5}$ $\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$?
2. Quelle est la concentration en ions H_3O^+ d'une solution de $\text{pH} = 8{,}4$?
3. Si la concentration en ions H_3O^+ d'une solution est multipliée par 10 000, quelle augmentation de pH cela produit-il ?

EXERCICE 23. Déterminez les limites de f au bornes de son domaine de définition $\mathscr{D}$.

a) $f(x) = \ln(3x-1)$ et $E = \left]\frac{1}{3},+\infty\right[$.
b) $f(x) = \ln(-x^2 + 4x)$ et $E =]0;4[$.
c) $f(x) = \ln\left(1 + e^{-2x}\right)$ et $E = \mathbb{R}$.
d) $f(x) = x\ln(5x)$ et $E =]0;+\infty[$.
e) $f(x) = \ln\left(x + e^{-x}\right)$ et $E = \mathbb{R}$.

EXERCICE 24. Soient f la fonction définie sur $]-2;2[$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Justifiez que f est définie sur $]-2;2[$.
2. Montrez que f est impaire puis interprétez graphiquement ce résultat.
3. Démontrez que la courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes que vous préciserez.
4. Étudiez le sens de variation de f puis donnez son tableau de variation.

EXERCICE 25. Soit f la fonction définie sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x) = \ln(2x-1) - x + 1$.

1. Déterminez la limite de $f(x)$ en $\frac{1}{2}$.
2. Montrez que pour tout réel $x > \frac{1}{2}$: $f(x) = \ln(x) - x + 1 + \ln\left(2 - \frac{1}{x}\right)$. Déduisez-en la limite de f en $+\infty$.
3. Démontrez que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions distinctes α et β ($\alpha < \beta$).
4. Donnez la valeur exacte de α et un encadrement de β d'amplitude 10^{-2}.

EXERCICE 26. Dans une pièce à la température constante de 20°C on prépare un tasse de thé. À l'instant initial $t = 0$ la température du thé est égale à 100°C. Quatre minutes plus tard elle est de 80°C.

On admet que la température du thé $f(t)$ en °C, est donnée par $f(t) = C\mathrm{e}^{at} + 20$ où t désigne le temps en minute et a et C sont des constantes réelles.

Au-dessus de 50°C le thé est trop chaud et on ne peut le boire.

Combien de temps faudra-t-il attendre pour boire le thé ?

EXERCICE 27. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{x^2}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Calculez la limite de f en 0.
   (b) Déterminez la limite de f en $+\infty$. Donnez-en un interprétation graphique.
2. (a) Montrez que pour tout réel $x > 0$: $f'(x) = \dfrac{-1-2\ln(x)}{x^3}$.
   (b) Déduisez-en les variations de f sur $]0,+\infty[$.
3. (a) Montrez que la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses dont vous préciserez les coordonnées.
   (b) Déduisez-en, le signe de f sur $]0,+\infty[$.

EXERCICE 28. Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(x) = x - \dfrac{\ln(x)}{x}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Soit g la fonction définie sur $[1,+\infty$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$. Montrez que la fonction g est positive sur $[1,+\infty[$.
2. (a) Montrez que, pour tout x de $[1,+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.
   (b) Déduisez-en le sens de variation de f sur $[1,+\infty[$.
3. On note $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x$. Étudiez la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.
4. Pour tout entier naturel k supérieur ou égale à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{D}$.
   (a) Déterminez la limite de M_kN_k lorsque k tend vers $+\infty$.
   (b) Écrivez un algorithme permettant de déterminer le plus petit entier k_0 supérieur ou égale à 2 tel que la distance M_kN_k soit inférieure ou égale à 10^{-2}.

EXERCICE 29. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 2 + \ln(x)$.

1. Déterminez les limites de f aux bornes de son domaine de définition et étudiez son sens de variation.
2. Démontrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0,+\infty[$.
3. Démontrez que $\ln(\alpha) = 2 - \alpha^2$.
4. Étudiez le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

5. On donne la fonction suivante écrite en Python.

```python
from math import*

def f(x):
    return x**2-2+log(x)

def dichotomie(a,b,p):
    while b-a>10**(-p):
        if f(a)*f((a+b)/2)<0:
            b=(a+b)/2
        else:
            a=(a+b)/2
    return a,b
```

En Python le logarithme népérien se note « log » et doit être importé de la bibliothèque « math ».
On écrit dans la console « dichotomie(1,2,1) ». Que renvoie cette instruction ?

EXERCICE 30. *Léa passe une bonne partie de ses journées à jouer à un jeu vidéo et s'intéresse aux chances de victoire de ses prochaines parties. Elle estime que si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70 % des cas.*

Mais si elle vient de subir une défaite, d'après elle, la probabilité qu'elle gagne la suivante est de 0,2.

De plus, elle pense avoir autant de chance de gagner la première partie que de la perdre.

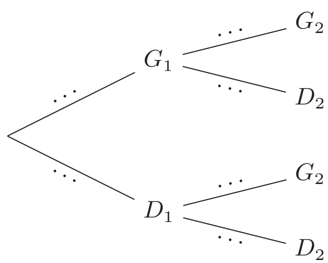
On s'appuiera sur les affirmations de Léa pour répondre aux questions de cet exercice.

Pour tout entier naturel n non nul, on définit les évènements suivants :

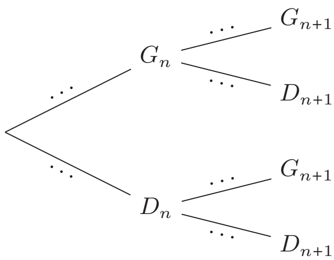
- G_n : « Léa gagne la n-ième partie de la journée » ;
- D_n : « Léa perd la n-ième partie de la journée ».

Pour tout entier naturel n non nul, on note g_n la probabilité de l'évènement G_n.
On a donc $g_1 = 0{,}5$.

1. Quelle est la valeur de la probabilité conditionnelle $p_{G_1}(D_2)$?
2. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premières parties de la journée :



3. Calculer g_2.
4. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $(n+1)$-ième parties de la journée.



(b) Justifier que pour tout entier naturel n non nul,

$$g_{n+1} = 0{,}5g_n + 0{,}2.$$

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = g_n - 0{,}4$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
   On précisera son premier terme et sa raison.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$g_n = 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}4.$$

6. Étudier les variations de la suite (g_n).
7. Donner, en justifiant, la limite de la suite (g_n).
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.
8. Déterminer, par le calcul, le plus petit entier n tel que $g_n - 0{,}4 \leqslant 0{,}001$.
9. Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 de la fonction suivante, écrite en langage Python, afin qu'elle renvoie le plus petit rang à partir duquel les termes de la suite (g_n) sont tous inférieurs ou égaux à $0{,}4 + e$, où e est un nombre réel strictement positif.

```
1  def seuil(e) :
2      g = 0.5
3      n = 1
4      while ... :
5          g = 0.5 * g + 0.2
6          n = ...
7      return (n)
```

EXERCICE 31. *Bac 1976 Série C remplacement Clermont-Ferrand.* Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = \ln(x^2 - 1) + \frac{1}{x^2-1}$.

1. Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(x^2 - 1) = \ln(x + 1) + \ln(x - 1)$. Même question pour l'équation $\ln(x^2 - 1) = 2\ln(x = + \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$. Calculez $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2-1)}{x}$.
2. Étudiez les variations de f et la représenter graphiquement.

EXERCICE 32. Soit a un réel strictement positif donné. On définit la suite réelle u, application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$, par son premier terme u_0, réel strictement positif, et par la relation : $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. pour quelle valeur de u_0 la suite u est-elle constante ?
2. On suppose dans toute la suite du problème que $u_0^2 - a \neq 0$.

(a) Démontrez les relations : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2u_n}\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + \sqrt{a} = \frac{1}{2u_n}\left(u_n + \sqrt{a}\right)^2$.

(b) Montrez que la suite u est strictement décroissante pour $n \geqslant 1$. Déduisez-en que la suite u admet une limite.

3. On définit la suite réelle v par la relation, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$.
   (a) Calculez v_{n+1} en fonction de v_n.
   (b) calculez v_{n+1} en fonction de v_1 et de n. déduisez-en la limite de la suite v. On pourra montrer que $\ln(v_{n+1})$ tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Trouvez la limite de la suite u.
5. On fixe dans cette question $u_0 = 2$ et $a = 2$. calculez u_1, u_2 et u_3 (laissez le résultat sous forme de fraction). Montrez que $u_1 - \sqrt{2} < 10^{-1}$. déduisez-en que : $u_2 - \sqrt{2} < \frac{1}{3}10^{-2}$. trouvez une majoration de l'erreur commise en prenant u_3 comme valeur approchée de $\sqrt{2}$.

EXERCICE 33. *Bac série C 1968. Montréal et New-York.* Construisez la courbe définie, en repère orthonormé, par l'équation $y = \ln\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)$. Montrez que l'origine est centre de symétrie de cette courbe.

EXERCICE 34. *Bac série C 1968. Clermont.* Étudiez les variations de la fonction $y = \ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$.

EXERCICE 35. *Bac série mathématiques élémentaire 1967. Éthiopie.*

On considère les fonctions f_0, f_1, f_2, f_3, ..., f_n ($n$entier positif) de la variable x définie par :

$$\begin{aligned}
&f_0(x) = \ln|x| \\
&f_1(x) = f_0(x+1) - f_0(x) \\
&f_2(x) = f_1(x+1) - f_1(x) \\
&f_3(x) = f_2(x+1) - f_2(x) \\
&\dots \\
&f_n(x) = f_{n-1}(x+1) - f_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

ln est la notation désignant le logarithme népérien ; $|x|$ est la valeur absolue du nombre réel x.

1. (a) Indiquez le domaine de définition de chacune de ces fonctions.
   (b) Étudiez les variations des fonctions f_0, f_1, f_2 et f_3 dans leurs domaines de définition respectifs. Tracez les courbes C_0, C_1, C_2 et C_3 qui représentent graphiquement es variations relativement à un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$.
2. (a) Montrez que C_0 et C_2 possèdent un axe de symétrie et que C_1 et C_3 possèdent un centre de symétrie.
   (b) Calculez les abscisses des points de rencontre avec l'axe $x'Ox$ des courbes C_0, C_1, C_2 et C_3.
   il est conseillé dans le cas de C_3 de faire un changement d'origine convenable.
3. Montrer que la fonction f_n a pour dérivée, pour la valeur x, $f_n'(x) = \frac{(-1)^n n!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$.
   Sans s'attarder à étudier en détail les variations de cette dérivée f_n' et à en tracer, relativement à un repère orthonormé, la courbe représentative, Γ_n, examiner dans quels cas Γ_n admet, soit un axe de symétrie soit un centre de symétrie.
   Précisez la position de cet axe ou de ce centre de symétrie.
4. (a) Calculer en raisonnant par récurrence, $f_n(x)$ en fonction de $f_0(x)$, $f_0(x+1)$, ..., $f_0(x+n)$.
   (b) On désigne par C_n la courbe qui, dans un repère orthonormé, a pour équation $y = f_n(x)$. Montrez que, si n est pair ($n = 2q$), la courbe C_{2q} admet un axe de

symétrie et que, si n est impair ($n = 2q + 1$), la courbe C_{2q+1} admet un centre de symétrie.
On pourra, soit raisonner par récurrence, soit utiliser la formule obtenue au 4a).

Une autre construction du logarithme népérien.

Exercices.

EXERCICE 36. Étudiez la fonction de la variable réelle x, f définie par $f(x) = \ln\left(\frac{x^2-4x}{x^2-4x+3}\right)$ et la représenter graphiquement dans un repère orthonormé.