Fonction logarithme népérien.

Point de départ l'exponentielle.

Proposition 1. La fonction exponentielle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration. En effet exp est continue (puisque dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$.

Logarithme népérien, propriétés algébriques.

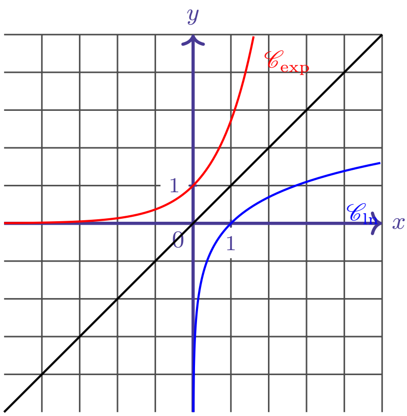
Nous avons établi avec le théorème de la bijection que exp réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Définition 1.

On appelle *logarithme népérien* et on note ln l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ qui est la réciproque de la fonction exponentielle.

Remarques.

1. ln se lit en épelant les lettres "l,n".
2. Si $\exp : x \mapsto y$ alors la fonction qui fera le lien réciproque $y \mapsto x$ a sa courbe représentative symétrique par rapport à la première bissectrice de celle exp.



3. Ainsi ln est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui à chaque $x \in]0, +\infty[$ associe l'unique nombre réel y tel que $x = e^y$.
4. Nous retiendrons que par définition de ln :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ e^{\ln(x)} = x.$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln\left(e^x\right) = x.$$

5. En utilisant la loi de composition des fonctions le précédent résultat devient : $\ln \circ \exp(x) = x$ et $\exp \circ \ln(x) = x$.
6. $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.

Exemples.

1. $e^x = 1 \iff \ln\left(e^x\right) = \ln(1) \iff x = 0$.
2. $e^x = 14 \iff x = \ln(14)$.

EXERCICE 1.

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $2e^{x} - 3 = 0$.

b) $e^{-x+1} - 1 = 0$.

c) $e^{2x} = 4$.

d) $(2e^{x} - 1)(e^{x} + 5) = 0$.

e) $-5e^{x} - 10 = 0$.

f) $7 - e^{5x-2} = 0$.

g) $e^{-3x} - 1 = 0$.

h) $e^{x}(e^{x} - 9) = 0$.

i) $e^{2x} + 3e^{x} = 0$.

EXERCICE 2.

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $\ln(x) = 3$.

b) $\ln(x) = -7$.

c) $2\ln(x) - 1 = 0$.

d) $(\ln(x) + 5)(4\ln(x) - 5) = 0$.

e) $(\ln(x))^2 = 9$.

f) $\ln(x) = -5$.

g) $-6\ln(x) + 3 = 0$.

h) $\ln(x)(2\ln(x) - 7) = 0$.

i) $(\ln(x))^2 - \ln(x) = 0$.

j) $(\ln(x))^3 - 2(\ln(x))^2 = 0$.

EXERCICE 3.

Déterminez l'ensemble (le domaine) de définition de la fonction f dans les cas suivants.

a) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

b) $f(x) = \ln(x + 1)$.

c) $f(x) = \ln\left(\frac{3x-1}{4x+11}\right)$.

d) $f(x) = \ln\left(\frac{2}{3}x + \frac{9}{7}\right)$.

e) $f(x) = \ln(x^2)$.

f) $f(x) = \ln((x - 2)(3x - 4))$.

g) $f(x) = \ln(e^{x} - 1)$.

h) $f(x) = \ln(2x^2 - 3x + 1)$.

i) $f(x) = \ln(x + 1) + \ln(x^2 - 4)$.

Exercice 3.

a) $\mathbb{R}_+^*$.

b) $]-1, +\infty[$.

c) $\left]-\infty, -\frac{11}{4}\right[\cup \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$.

d) $\left]-\frac{27}{14}, +\infty\right[$.

e) $\mathbb{R}^*$.

f) $\left]-\infty, \frac{4}{2}\right[\cup]2, +\infty[$.

g) $\mathbb{R}_+^*$.

h) $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup]1, +\infty[$.

i) $]-1, +\infty[\cap (]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[) =]2, +\infty[$.

Propriétés algébriques.

Proposition 2.

Soient $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$.

(i) $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

(ii) $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.

(iii) $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

(iv) $\ln(a^n) = n\ln(a)$.

(v) $\ln(a^{-n}) = -n\ln(a)$.

(vi) $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

Démonstration.

(i) D'une part

$$\exp(\ln(ab)) = ab,$$

d'autre part

$$\begin{aligned}\exp(\ln(a)+\ln(b)) &= \exp(\ln(a)) \times \exp(\ln(b)) \\ &= ab\end{aligned}$$

donc $\exp(\ln(ab)) = \exp(\ln(a)+\ln(b))$.

En composant par ln ou en utilisant les résultats vus en première : $\ln(ab) = \ln(a)+\ln(b)$.

(ii) $\ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln(1) = 0$.

(iii) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

(iv) Par récurrence.

(v) D'après (ii) et (iv).

(vi) $\ln(a) = \ln\left(\sqrt{a}^2\right) = 2\ln(\sqrt{a})$.

EXERCICE 4.

Simplifiez les nombres suivants pour les écrire en fonction de $\ln(3)$ uniquement.

a) $\ln(9)$.

b) $\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

c) $\ln\left(3\sqrt{3}\right)$.

d) $\ln(36) - 2\ln(2)$.

EXERCICE 5.

Simplifiez les nombres suivants pour les écrire en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(5)$ uniquement.

a) $\ln(10) - \ln\left(\frac{1}{4}\right)$.

b) $\ln(0{,}05)$.

c) $\ln\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

d) $2\ln\left(5\mathrm{e}^2\right) + \ln\left(4\mathrm{e}^{-1}\right)$.

EXERCICE 6.

Simplifiez les expressions suivantes.

a) $A = \ln\left(\mathrm{e}^4\right) + 3\ln\left(\mathrm{e}^{-1}\right)$.

b) $B = \mathrm{e}^{2\ln(5)} - \ln\left(\left(\mathrm{e}^5\right)^2\right)$.

c) $C = \ln\left(\mathrm{e}^{-3}\right) \times \ln\left(\mathrm{e}^3\right)$.

d) $D = 20\ln(\sqrt{e}) - \mathrm{e}^{3\ln(3)}$.

Exercices.

EXERCICE 7.

Déterminez la valeur exacte de $S = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{49}{50}\right)$.

EXERCICE 8.

Démontrez que

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) = -x + \ln(1+\mathrm{e}^x)$.

b) $\forall x > -1,\ 2\ln(x+1) = \ln(x^2+2x+1)$.

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right) = -2x + \ln\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right)$.

EXERCICE 9.

Déterminez les ensembles de définition des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \ln(3x-7)$.
b) $g(x) = \ln(-x^2+4x-3)$.
c) $h(x) = \ln(x) - 3\ln(2-x)$.

EXERCICE 10.

Résolvez les équations suivantes après avoir déterminé l'ensemble sur lequel on peut les résoudre.

a) $\ln(x) = \ln(x+2)$.
b) $\ln(-x+3) = \ln(3x+5)$.
c) $\ln(2x^2+4) = \ln(-5x+1)$.
d) $\ln(x^2) = \ln(x) + \ln(6)$.
e) $\ln(x+1) + \ln(x-4) = \ln(5)$.
f) $2\ln(x) = \ln(5x-3)$.
g) $\ln\left[(x-3)(2x+1)\right] = \ln(4)$.
h) $\ln(x-3) + \ln(2x+1) = 3\ln(2)$.

Exercice 10.

a) $\mathbb{R}_+^*$ et $\varnothing$.
b) $\left]-\frac{5}{3},3\right[$ et $-\frac{1}{2}$.
c) $\left]-\infty,\frac{1}{5}\right[$ et $\left\{1,\frac{3}{2}\right\}$.
d) $\mathbb{R}_+^*$ et 6.
e) $]4,+\infty[$ et $\left\{\frac{21}{4}\right\}$.
f) $\left]\frac{3}{5},+\infty\right[$ et $\left\{1,\frac{3}{2}\right\}$.
g) $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\cup]3,+\infty[$ et $\left\{-1,\frac{7}{2}\right\}$.
h) $]3,+\infty[$ et $\left\{\frac{5+\sqrt{113}}{4},\frac{5-\sqrt{113}}{4}\right\}$.

EXERCICE 11.

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $[\ln(x)]^2 - 2\ln(x) - 3 = 0$.
b) $4[\ln(x)]^2 - \ln\left(\frac{1}{x}\right) - 3 = 0$.
c) $4e^{2x} + 7e^x - 2 = 0$.
d) $\ln(-x) = \ln\left(x^2-1\right)$.
e) $\ln\left(2-e^x\right) - \ln\left(2e^x-1\right) = 0$.
f) $\ln(4) + \ln(x-1) = 2\ln(x)$.
g) $\left(2x^2+3x-6\right)\ln(1-x) = 0$.
h) $\ln\left(e^x-1\right) + \ln\left(e^x+1\right) = 1 + \ln(2)$.
i) $\ln(x+1) - \ln(x) = 2\ln(3)$.

Exercice 11.

a) $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln(x) \in \{-1;3\}$ donc $x = e^3$.
b) $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln(x) \in \{-1;\frac{3}{4}\}$ donc $x = e^{\frac{3}{4}}$.
c) $\mathbb{R}$ et $e^x \in \left\{2;\frac{1}{4}\right\}$ donc $x \in \left\{\ln(2),\ln\left(\frac{1}{4}\right)\right\}$.
d) $x \in \mathbb{R}_- \cap (]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[) =]-\infty,-1[$ et $x \in \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$ pas de solution.
e) $x \in \left]\ln\left(\frac{1}{2}\right),\ln(2)\right[$ et $x = 0$.
f) $x \in]1,+\infty[$, x^2-4x+4 et $x \in \{2\}$.
g) $x \in]-\infty,1[$, et $c \in \{0;1;-3\}$.
h)

I Logarithme népérien, variation de la fonction.

Pour que cette leçon ait du sens il faut se souvenir que nous avons uniquement la courbe représentative de ln comme réciproque de exp. Nous allons vérifier certaines propriétés qui semblent claires graphiquement.

L'objectif est ici de faire e ln une fonction de référence dont les propriétés pourront être utilisées pour étudier d'autres fonctions.

Monotonie.

Proposition 3.
ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.
Démontrons que ln est strictement croissante.
Soit $(y_1,y_2) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ avec $y_1 < y_2$.
Notons $x_1 = \ln(y_1)$ et $x_2 = \ln(y_2)$.
Raisonnons par l'absurde en supposant $x_1 \geqslant x_2$.
Alors la fonction exponentielle étant strictement croissante :

$$\mathrm{e}^{x_1} \geqslant \mathrm{e}^{x_2}.$$

Autrement dit :

$$y_1 \geqslant y_2.$$

Ce qui est impossible puisque nous avions choisi : $y_1 < y_2$. Donc, nécessairement, $x_1 < x_2$.

Nous avons démontré que

$$\forall (y_1,y_2) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ x_1 < x_2 \Longrightarrow \ln(x_1) < \ln(x_2).$$

Autrement dit

$$\boxed{\text{ln est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*.\ .}$$

Exemples.

1. $\mathrm{e}^x > 2 \Longleftrightarrow \ln\left(\mathrm{e}^x\right) = \ln(2) \Longleftrightarrow x > \ln(2) \Longleftrightarrow x \in]\ln(2), +\infty[$.
2. À partir de quel entier naturel a-t-on $5^n \geqslant 10^9$.

Signe.

Proposition 4.

x	0		1		$+\infty$
ln	‖	$-$	0	$+$	

Démonstration.

* Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}\ln(x) > 0 &\Longleftrightarrow \exp\circ\ln(x) > \exp(0)\\ &\Longleftrightarrow x > 1\end{aligned}$$

* De même, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1$.

Exemples.

1. À partir de quel entier naturel a-t-on $0{,}5^n \geqslant 10^{-9}$.

EXERCICE 12.
Résolvez les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

a) $\ln(x) < 3$.
b) $2\ln(x) + 200 > 0$.
c) $1 - 2\ln(x) \geqslant 0$.
d) $2\ln(x) - 4\ln(3) < 0$.

EXERCICE 13.

L'évolution d'une population d'animaux en fonction du temps est modélisée par la fonction P définie par $P(t) = 50e^{\frac{t}{2}}$, où t est exprimé en années.

1. Au bout de combien d'années la population initiale aura-t-elle été multipliée par 2 ?
2. Au bout de combien d'année la population dépassera-t-elle les 10 000 individus ?

EXERCICE 14.

Déterminez le plus petit entier naturel n tel que

a) $0{,}99^n \leqslant 10^{-30}$.
b) $1{,}02^n > 10^{2024}$.

EXERCICE 15.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 1{,}001$. Déterminez s'il existe un plus petit entier naturel n tel que $u_n > 100\,000$.

EXERCICE 16.

Résolvez les inéquations suivantes après avoir déterminé sur quel ensemble on peut le résoudre.

a) $\ln(3x - 4) < 0$.
b) $\ln(-x + 3) \geqslant 1$.
c) $\ln(-x + 1)\ln(x)$.
d) $\ln(3 + 2x) < \ln(x - 3)$.

EXERCICE 17.

Résolvez les inéquations suivantes.

a) $\ln(x + 1) > 0$.
b) $\dfrac{\ln(x) - 1}{x^2 + 1} > 0$.
c) $\dfrac{\ln(x)}{x^2 - 3x + 2} > 0$.
d) $[\ln(x)]^2 - 5\ln(x) + 4 < 0$.

Régularité.

Proposition 5.

ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration. Hors programme.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Démontrons que ln est continue en x.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Proposition 6.

ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Démonstration.

Une justification en admettant la dérivabilité de ln : $\exp \circ \ln(x) = x$ alors en dérivant $\exp \circ \ln(x) \times \ln'(x) = 1$.

Convexité.

Proposition 7.
ln est concave (sur $\mathbb{R}_+^*$).

Démonstration.
ln est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$.

Remarques.

1. Nous en déduisons en particulier que la courbe représentative de ln est au-dessous de toutes ses tangentes.

Limites.

Proposition 8.

$$\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \ln(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} -\infty$$

Démonstration.

EXERCICE 18.
Déterminez la limite en a des fonctions f et g suivantes.

a) $f(x) = 2\left[\ln(x)\right]^2 + 3\ln(x) + 1$ avec $a = +\infty$.
b) $g(x) = -\left[\ln(x)\right]^2 + \ln(x)$ avec $a = 0$.

Fonctions composées avec ln.

Proposition 9.
Si u est une application dérivable sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ alors $\ln\circ u$ est dérivable sur I et

$$(\ln\circ u)' = \frac{u'}{u}.$$

Démonstration.
C'est une application directeur du théorème de dérivation des fonctions composées.

Remarques.

1. Cette formule est souvent écrite $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$.

Croissances comparées.

Nous devons comparer la croissance de ln à celle de $x \mapsto x^n$ et exp en $+\infty$ et en 0.

Proposition 10.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^n \ln(x) = 0.$$

Démonstration.

* Notons $y = \ln(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
  $\frac{\ln(x)}{x} = \frac{y}{e^y}$.
  Comme $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, par composition et en reconnaissant une croissance comparée usuelle, $\lim_{x\to+\infty} \frac{y}{e^y} = 0$.

* Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 0$.
$\frac{\ln(x)}{x^n} = \frac{1}{x^{n-1}} \frac{\ln(x)}{x}$.
$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = 0$ car $n \geqslant 2$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, donc par passage à la limite dans le produit : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$.
* Notons $X = \frac{1}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$.
Puisque $x^n \ln(x) = -\frac{\ln(X)}{x^n}$ nous déduisons de ce qui précède, par composition, $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^n \ln(x) = 0$.

Remarques.

1. $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$.

EXERCICE 19.

Déterminez la limite en a des fonctions f et g suivantes définies sur $]0;+\infty[$.

1. $f(x) = (\mathrm{e}^x - 1)(1 - \ln(x))$ avec $a = +\infty$.
2. $g(x) = \dfrac{\ln(x) - 1}{x}$ avec $a = 0$.

EXERCICE 20.

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{2x+1}$.

1. Déterminez la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.
2. (a) Vérifiez que pour tout réel $x > 0$: $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x} \times \dfrac{1}{2 + \frac{1}{x}}$.

   (b) Déduisez-en la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. interprétez graphiquement les résultats précédents.

EXERCICE 21.

a et b étant deux nombres réels donnés, on considère la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = a + b\frac{\ln(x)}{x}$.

Sachant que $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale $\mathscr{D}$ d'équation $y = 1$ et une tangente $\mathscr{T}$ au point d'abscisse 1 d'équation $y = -x + 2$, déterminez les valeurs de a et b.

Exercices.

EXERCICE 22.

EXERCICE 23.

Déterminez les limites de f au bornes de son domaine de définition $\mathscr{D}$.

a) $f(x) = \ln(3x-1)$ et $E = \left]\frac{1}{3},+\infty\right[$.

b) $f(x) = \ln(-x^2 + 4x)$ et $E =]0;4[$.

c) $f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-2x}\right)$ et $E = \mathbb{R}$.

d) $f(x) = x\ln(5x)$ et $E =]0;+\infty[$.

e) $f(x) = \ln\left(x + \mathrm{e}^{-x}\right)$ et $E = \mathbb{R}$.

EXERCICE 24.

Soient f la fonction définie sur $]-2;2[$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Justifiez que f est définie sur $]-2;2[$.
2. Montrez que f est impaire puis interprétez graphiquement ce résultat.

3. Démontrez que la courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes que vous préciserez.
4. Étudiez le sens de variation de f puis donnez son tableau de variation.

EXERCICE 25.

Soit f la fonction définie sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x) = \ln(2x-1) - x + 1$.

1. Déterminez la limite de $f(x)$ en $\frac{1}{2}$.
2. Montrez que pour tout réel $x > \frac{1}{2}$: $f(x) = \ln(x) - x + 1 + \ln\left(2 - \frac{1}{x}\right)$. Déduisez-en la limite de f en $+\infty$.
3. Démontrez que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions distinctes α et β ($\alpha < \beta$).
4. Donnez la valeur exacte de α et un encadrement de β d'amplitude 10^{-2}.

Exercice 25.

1.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	

donc $\lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ x>\frac{1}{2}}} 2x-1 = 0^+$.

et $\lim_{X\to 0^+} \ln(X) = -\infty$ donc, par composition $\lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ x>\frac{1}{2}}} \ln(2x-1) = -\infty$.

2. $x \neq 0$ donc $\ln(2x-1) = \ln\left[x\left(2-\frac{1}{x}\right)\right]$. $x > 0$ donc $\ln(2x-1) = \ln(x)\left(2-\frac{1}{x}\right)$.
3.
4. $\alpha = 1$.

EXERCICE 26.

Dans une pièce à la température constante de 20°C on prépare un tasse de thé. À l'instant initial $t = 0$ la température du thé est égale à 100°C. Quatre minutes plus tard elle est de 80°C.

On admet que la température du thé $f(t)$ en °C, est donnée par $f(t) = Ce^{at} + 20$ où t désigne le temps en minute et a et C sont des constantes réelles.

Au-dessus de 50°C le thé est trop chaud et on ne peut le boire.

Combien de temps faudra-t-il attendre pour boire le thé ?

EXERCICE 27.

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{x^2}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Calculez la limite de f en 0.
   (b) Déterminez la limite de f en $+\infty$. Donnez-en un interprétation graphique.
2. (a) Montrez que pour tout réel $x > 0$: $f'(x) = \dfrac{-1-2\ln(x)}{x^3}$.
   (b) Déduisez-en les variations de f sur $]0,+\infty[$
3. (a) Montrez que la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses dont vous préciserez les coordonnées.
   (b) Déduisez-en, le signe de f sur $]0,+\infty[$.

EXERCICE 28.

Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(x) = x - \dfrac{\ln(x)}{x}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Soit g la fonction définie sur $[1, +\infty$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$. Montrez que la fonction g est positive sur $[1, +\infty[$.
2. (a) Montrez que, pour tout x de $[1, +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.
   (b) Déduisez-en le sens de variation de f sur $[1, +\infty[$.
3. On note $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x$. Étudiez la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.
4. Pour tout entier naturel k supérieur ou égale à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{D}$.
   (a) Déterminez la limite de M_kN_k lorsque k tend vers $+\infty$.
   (b) Écrivez un algorithme permettant de déterminer le plus petit entier k_0 supérieur ou égale à 2 tel que la distance M_kN_k soit inférieure ou égale à 10^{-2}.

EXERCICE 29.

EXERCICE 30.

Identifier parmi les suites dont le terme général est donné ci-après, les situations conduisant à une forme indéterminée lors de l'étude de la convergence, sinon donnez la limite.

On peut schématiquement résumer les formes indéterminées par :

$$(+\infty) - (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty), \quad 0 \times \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{}{0^?}.$$

a) $\frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}$.
b) $n^2 - 6^n$.
c) $\ln(n^{-1}) + n!$.
d) $2^{-n} + \ln(n)$.
e) $n^{12} + \frac{1}{n^{100}}$.
f) $\frac{1}{\ln(n)} + n! + 1$.
g) $n^2 3^n$.
h) $\frac{n^2}{n^{12}}$.
i) $\frac{n!}{2^n}$.
j) $n^{-2}\left(\frac{5}{4}\right)^n$.
k) $\frac{n^{-3}}{\ln(n)}$.
l) $n^5 2^{-n}$.
m) $n^{-3} + 0{,}5^n \ln(n)$.
n) $\frac{1}{n^4} \times \mathrm{e}^n + 4$.
o) $\frac{\ln(n)}{\mathrm{e}^n}$.

Exercice 30.

a) 0.
b) Indéterminée.
c) Indéterminée.
d)

EXERCICE 31.

Déterminez, si possible la limite des suites dont le terme général est donné ci-dessous.

a) $n^7 + 12$.
b) $4^n - 7$.
c) $n^3 + \frac{0{,}1^n}{\ln(n)}$.
d) $\frac{1}{n} + 4$.
e) $n^{-4} + \ln(n)$.
f) $\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 + \frac{1}{n^2}$.
g) $n!n^2 + 2 - \frac{1}{n^2}$.
h) $\frac{\ln(n)}{2 + \mathrm{e}^{-n}}$.
i) $\frac{n^4 + 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4}$.
j) $\frac{n \times 2^n}{3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$.
k) $n! - \left(2 - n^2\right)$.
l) $n^2\left(n^3 + \frac{3}{\ln(n)} + 1\right)$.
m) $2n^3 + 5n^2 + n - 12$.
n) $-5n^3 - 2n^2 - 12n - 3$.
o) $4n^2 - n + 1$.
p) $\frac{n^3}{n^2}$.
q) $n^2 + 3^n + 4 - \frac{1}{n}$.

EXERCICE 32.

Léa passe une bonne partie de ses journées à jouer à un jeu vidéo et s'intéresse aux chances de victoire de ses prochaines parties. Elle estime que si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70 % des cas.

Mais si elle vient de subir une défaite, d'après elle, la probabilité qu'elle gagne la suivante est de 0,2.

De plus, elle pense avoir autant de chance de gagner la première partie que de la perdre.

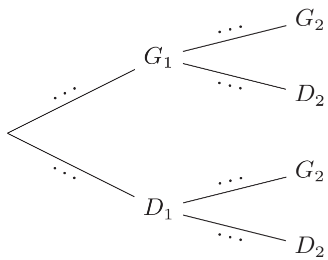
On s'appuiera sur les affirmations de Léa pour répondre aux questions de cet exercice.

Pour tout entier naturel n non nul, on définit les évènements suivants :

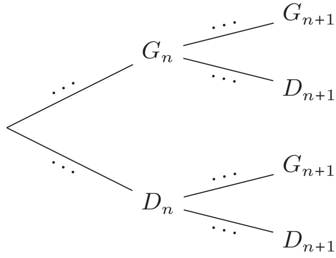
- G_n : « Léa gagne la n-ième partie de la journée » ;
- D_n : « Léa perd la n-ième partie de la journée ».

Pour tout entier naturel n non nul, on note g_n la probabilité de l'évènement G_n.
On a donc $g_1 = 0{,}5$.

1. Quelle est la valeur de la probabilité conditionnelle $p_{G_1}(D_2)$?
2. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premières parties de la journée :



3. Calculer g_2.
4. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $(n+1)$-ième parties de la journée.



   (b) Justifier que pour tout entier naturel n non nul,

$$g_{n+1} = 0{,}5g_n + 0{,}2.$$

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = g_n - 0{,}4$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
   On précisera son premier terme et sa raison.

(b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$g_n = 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}4.$$

6. Étudier les variations de la suite (g_n).
7. Donner, en justifiant, la limite de la suite (g_n).
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.
8. Déterminer, par le calcul, le plus petit entier n tel que $g_n - 0{,}4 \leqslant 0{,}001$.
9. Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 de la fonction suivante, écrite en langage Python, afin qu'elle renvoie le plus petit rang à partir duquel les termes de la suite (g_n) sont tous inférieurs ou égaux à $0{,}4 + e$, où e est un nombre réel strictement positif.

```
1  def seuil(e) :
2      g = 0.5
3      n = 1
4      while . . . :
5          g = 0.5 * g + 0.2
6          n = . . .
7      return (n)
```

Une autre construction du logarithme népérien.

Il est possible de définir la fonction logarithme népérien sans la fonction exponentielle mais avec la notion de primitive.

La restriction de la fonction inverse à $\mathbb{R}_+^*$ est continue donc elle admet une primitive qui s'annule en 0.

Définition 2. On appelle fonction *logarithme népérien*, et on note ln, la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \, ln(x) := \int_1^x \frac{dt}{t}$.

Remarques.

1. ln se lit en épelant les lettres "l,n".
2. L'ensemble de définition de ln est $\mathbb{R}_=^*$.
3. $\ln(1) = 0$.
4. $\ln(\mathrm{e}) = 1$.
5. ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Proposition 11. ln est continue.

Démonstration. ln est dérivable (par construction) donc continue.

Proposition 12.

x	0		1		$+\infty$
ln	‖	$-$	0	$+$	

Proposition 13. ln est strictement croissante.

Proposition 14. $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \ln(x) = -\infty$.

Démonstration.

La seconde limite découle de la première par composition avec la fonction inverse.