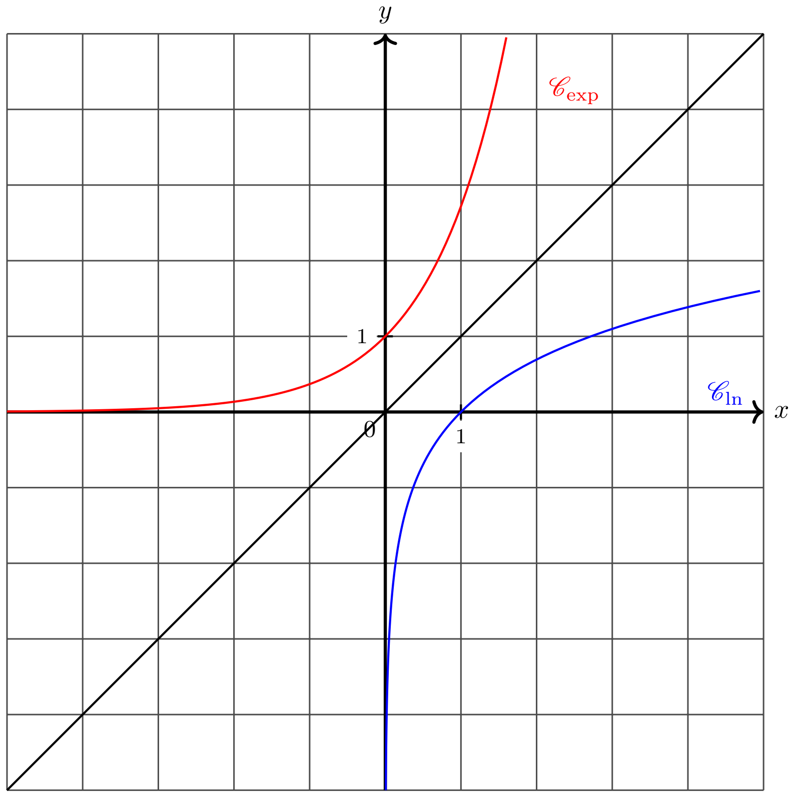
Fonction logarithme.

I Fonction réciproque et bijection.

1 Aspect géométrique.

Si exp : $x \mapsto y$ alors la fonction qui fera le lien réciproque $y \mapsto x$ a sa courbe représentative symétrique par rapport à la première bissectrice de celle exp.



2 Définition de bijection.

3 Exemple d'exponentielle.

Proposition 1

La fonction exponentielle définie une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Définition 1

La fonction réciproque d'exponentielle est appelée *logarithme népérien* et est notée ln.

Remarques.

1. Ainsi ln est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui à chaque $x \in]0, +\infty[$ associe l'unique nombre réel y tel que $y = \mathrm{e}^x$.
2. Nous retiendrons que par définition de ln :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \mathrm{e}^{\ln(x)} = x.$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ln\left(\mathrm{e}^x\right) = x.$$

3. En utilisant la loi de composition des fonctions le précédent résultat devient : $\ln \circ \exp(x) = x$ et $\exp \circ \ln(x) = x$.
4. $\ln(1) = 0$ et $\ln(\mathrm{e}) = 1$.

Exemples.

1. $\mathrm{e}^x = 1 \iff \ln\left(\mathrm{e}^x\right) = \ln(1) \iff x = 0$.
2. $\mathrm{e}^x = 14 \iff x = \ln(14)$.

II Logarithme népérien.

1 Étude de la fonction.

Proposition 2

ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration

Démontrons que ln est strictement croissante.

Soit $(y_1, y_2) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ avec $y_1 < y_2$.
Notons $x_1 = \ln(y_1)$ et $x_2 = \ln(y_2)$.
Raisonnons par l'absurde en supposant $x_1 \geqslant x_2$.
Alors la fonction exponentielle étant strictement :

$$\mathrm{e}^{x_1} \geqslant \mathrm{e}^{x_2}.$$

Autrement dit :

$$y_1 \geqslant y_2.$$

Ce qui est impossible puisque nous avions choisi : $y_1 < y_2$. Donc, nécessairement, $x_1 < x_2$.

Nous avons démontré que

$$\forall (y_1,y_2) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ x_1 < x_2 \Rightarrow \ln(x_1) < \ln(x_2).$$

Autrement dit

ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. .

■

Exemples.

1. $\mathrm{e}^x > 2 \Leftrightarrow \ln\left(\mathrm{e}^x\right) = \ln(2) \Leftrightarrow x > \ln(2) \Leftrightarrow x \in]\ln(2), +\infty[$.

Proposition 3

x	0		1		$+\infty$
ln	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Démonstration

*

$$\ln(x) > 0 \Leftrightarrow$$

■

Proposition 4

ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 5

ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Démonstration

Démonstration au programme.

Une justification en admettant la dérivabilité de ln : $\exp \circ \ln(x) = x$ alors en dérivant $\exp \circ \ln(x) \times \ln'(x) = 1$.

■

Proposition 6

$$\ln(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

et

$$\ln(x) \underset{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}{\longrightarrow} -\infty$$

Démonstration

■

2 Propriétés algébriques.

Proposition 7

(i) $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

(ii) $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.

(iii) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

(iv) $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$.

(v) $\ln(a^{-n}) = -n\ln(a)$.

(vi) $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

III Dérivées de fonctions composées avec ln.

Proposition 8

Si u est une fonction définie et dérivable sur I et si u est à valeurs strictement positives alors $\ln \circ u$ est dérivable sur I et

$$(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}.$$

IV Croissance comparée.

V Tangente en 1.

VI Logarithme et exponentielle de base $a \in \mathbb{R}_+^*$.

VII Exercices.

Exercice 1.

1.
2.
3. (a)
   (b)
   (c)

Exercice 2.

1. (a)
   (b)
2.
3.