Composition de fonctions.

I Définition.

Définition 1

Soient :

. E, F, G et H des ensembles de nombres réels,

. $f : E \to F$ et $g : G \to H$ deux fonctions.

Si $f(\mathscr{D}_f) \subset \mathscr{D}_g$ alors nous appellerons *composée de f suivie de g* la fonction notée $g \circ f$ et définie sur $\mathscr{D}_f$ par

$$\forall x \in \mathscr{D}_f,\ g \circ f(x) = g\left[f(x)\right]$$

Remarques.

1. Nous lirons « f rond g » pour $g \circ f$.
2. La situation peut être schématisée par

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & f(x) \arrow[r, "g"] & g\left[f(x)\right] \end{tikzcd}$$

3. $\circ$ peut se voir comme une nouvelle opération entre fonctions.

Exercice 1. Commutativité. ☢

La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ?

Quelles que soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$f \circ g = g \circ f.$$

II Passage à la limite et composition.

En attente...

III Composition et dérivation.

Proposition 1

Soient :

. I et J des intervalles,

. $f : I \to J$ une fonction définie sur I,

. $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur J.

Si f est dérivable sur I et si g est dérivable sur J alors $g \circ f$ est dérivable sur I et
$$(g \circ f)' = g' \circ f \times f'$$

Exercice 2.

Déterminez la dérivée de la fonction f sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans les cas suivants (u est une fonction à valeurs réelles) :

1. $f : x \mapsto \sqrt{u(x)}$ avec u une fonction à valeurs positives dérivable sur I,
2. $f : x \mapsto (u(x))^n$ avec u une fonction dérivable sur I et $n \in \mathbb{Z}^*$.
3. $f : x \mapsto u(x^n)$ avec u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
4. $f : x \mapsto u(ax + b)$ avec u une fonction dérivable sur I et a et b des réels.

Exercice 3.

Donnez le domaine de dérivabilité et calculez la dérivée de la fonction u dans les cas suivants.

a) $u : x \mapsto \sqrt{-4x^2+16}$.

b) $u : x \mapsto 4x + 5\mathrm{e}^{-2x+3}$.

c) $u : x \mapsto \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-4x}}$.

d) $u : x \mapsto \dfrac{1}{3x^2+9x+6}$.

e) $u : x \mapsto (\sqrt{x}+3)^4$.

f) $u : x \mapsto \dfrac{3x-5}{\mathrm{e}^{3x-5}}$.

g) $u : x \mapsto (2x^3-7x)^5$.

h) $u : x \mapsto \cos(3x)$.

i) $u : x \mapsto \sqrt{3x^2+1}$.

j) $u : x \mapsto \sqrt{4x^2+4x+1}$.

k) $u : x \mapsto \sqrt{x^2-3x-2}$.

l) $u : x \mapsto \left(5x^3-4\right)^2$

m) $u : x \mapsto (5x^4-3x+2)^6$.

n) $u : x \mapsto \left(\dfrac{1}{x+6}\right)^3$.

Exercice 4.

Donnez le domaine de dérivabilité, calculez la dérivée de la fonction u puis donnez son tableau de variation dans les cas suivants.

a) $u : x \mapsto (2x-4)\mathrm{e}^{-5x}$.

b) $u : x \mapsto \sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}$.

c) $u : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^{x} - 6$.

d) $u : x \mapsto \dfrac{77}{1+\mathrm{e}^{39-0{,}02x}} + 4$.

e) $u : x \mapsto x\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-2x} + 1 - x$.

IV Des exercices avec de la dérivation en vrac.

V Étude de la monotonie de la fonction composée. ☣

Proposition 2

Soient I et J des intervalles, $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

(i) Si f et g sont (resp. strictement) monotones de même sens de variation, alors $g \circ f$ est (resp. strictement) croissante.

(ii) Si f et g sont (resp. strictement) monotones de sens de variation opposés, alors $g \circ f$ est (resp. strictement) décroissante.

Exercice 5.

Démontrez l'un des cas du (ii) de la proposition précédente.

Exercice 6.

Étudiez la monotonie des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$.
3. $x \mapsto \sqrt{x}^3$ sur $\mathbb{R}_+$.