

Composition de fonctions.

I Définition.

Définition 1

Soient :

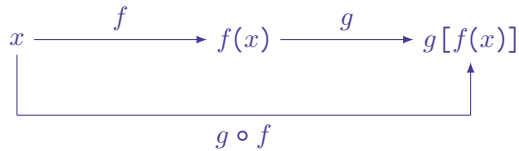
- . E, F, G et H des ensembles de nombres réels,
- . $f : E \rightarrow F$ et $g : G \rightarrow H$ deux fonctions.

Si $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$ alors nous appellerons *composée de f suivie de g* la fonction notée $g \circ f$ et définie sur \mathcal{D}_f par

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, g \circ f(x) = g[f(x)]$$

Remarques.

1. Nous lirons « f rond g » pour $g \circ f$.
2. La situation peut être schématisée par



3. \circ peut se voir comme une nouvelle opération entre fonctions.

Exercice 1. Commutativité. ♣

La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ?

Quelles que soient les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} :

$$f \circ g = g \circ f.$$

II Passage à la limite et composition.

En attente...

III Composition et dérivation.

Proposition 1

Soient :

- . I et J des intervalles,
- . $f : I \rightarrow J$ une fonction définie sur I ,
- . $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur J .

Si f est dérivable sur I et si g est dérivable sur J alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$(g \circ f)' = g' \circ f \times f'$$

Exercice 2.

Déterminez la dérivée de la fonction f sur un intervalle I de \mathbb{R} dans les cas suivants (u est une fonction à valeurs réelles) :

1. $f : x \mapsto \sqrt{u(x)}$ avec u une fonction à valeurs positives dérivable sur I ,
2. $f : x \mapsto (u(x))^n$ avec u une fonction dérivable sur I et $n \in \mathbb{Z}^*$.
3. $f : x \mapsto u(x^n)$ avec u une fonction dérivable sur \mathbb{R} et $n \in \mathbb{N}^*$.
4. $f : x \mapsto u(ax + b)$ avec u une fonction dérivable sur I et a et b des réels.

Exercice 3.

Donnez le domaine de dérivabilité et calculez la dérivée de la fonction u dans les cas suivants.

a) $u : x \mapsto \sqrt{-4x^2 + 16}$.

b) $u : x \mapsto 4x + 5e^{-2x+3}$.

c) $u : x \mapsto \frac{2}{1 + e^{-4x}}$.

d) $u : x \mapsto \frac{1}{3x^2 + 9x + 6}$.

e) $u : x \mapsto (\sqrt{x} + 3)^4$.

f) $u : x \mapsto \frac{3x - 5}{e^{3x-5}}$.

g) $u : x \mapsto (2x^3 - 7x)^5$.

h) $u : x \mapsto \cos(3x)$.

i) $u : x \mapsto \sqrt{3x^2 + 1}$.

j) $u : x \mapsto \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$.

k) $u : x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x - 2}$.

l) $u : x \mapsto (5x^3 - 4)^2$.

m) $u : x \mapsto (5x^4 - 3x + 2)^6$.

n) $u : x \mapsto \left(\frac{1}{x+6}\right)^3$.

Exercice 4.

Donnez le domaine de dérivabilité, calculez la dérivée de la fonction u puis donnez son tableau de variation dans les cas suivants.

a) $u : x \mapsto (2x - 4)e^{-5x}$.

b) $u : x \mapsto \sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}$.

c) $u : x \mapsto e^{2x} + 4e^x - 6$.

d) $u : x \mapsto \frac{77}{1 + e^{39-0,02x}} + 4$.

e) $u : x \mapsto xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x$.

IV Des exercices avec de la dérivation en vrac.

V Étude de la monotonie de la fonction composée. ☹

Proposition 2

Soient I et J des intervalles, $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

- (i) Si f et g sont (resp. strictement) monotones de même sens de variation, alors $g \circ f$ est (resp. strictement) croissante.
- (ii) Si f et g sont (resp. strictement) monotones de sens de variation opposés, alors $g \circ f$ est (resp. strictement) décroissante.

Exercice 5.

Démontrez l'un des cas du (ii) de la proposition précédente.

Exercice 6.

Étudiez la monotonie des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur \mathbb{R}^* .

2. $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur \mathbb{R}^* .

3. $x \mapsto \sqrt{x^3}$ sur \mathbb{R}_+ .