Composition de fonctions.

I Définition.

Définition 1

Soient :

. E, F, G et H des ensembles de nombres réels,

. $f : E \to F$ et $g : G \to H$ deux fonctions.

Si $f(\mathscr{D}_f) \subset \mathscr{D}_g$ alors nous appellerons *composée de f suivie de g* la fonction notée $g \circ f$ et définie sur $\mathscr{D}_f$ par

$$\forall x \in \mathscr{D}_f,\ g \circ f(x) = g\left[f(x)\right]$$

Remarques.

1. Nous lirons « f rond g » pour $g \circ f$.
2. La situation peut être schématisée par

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & f(x) \arrow[r, "g"] & g\left[f(x)\right] \end{tikzcd}$$

3. $\circ$ peut se voir comme une nouvelle opération entre fonctions.

Exercice 1. Commutativité.

La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ?

Quelles que soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$f \circ g = g \circ f.$$

Correction de l'exercice 1

Il s'agit d'une proposition universelle pour démontrer qu'elle est fausse il suffit de trouver un contre-exemple.

Faux. Contre-exemple avec $f : x \mapsto -x$ et $g : x \mapsto x+1$, $f \circ g(1) = -2$ mais $g \circ f(1) = 0$.

II Passage à la limite et composition.

En attente...

III Composition et dérivation.

Proposition 1

Soient :

. I et J des intervalles,

. $f : I \to J$ une fonction définie sur I,

. $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur J.

Si f est dérivable sur I et si g est dérivable sur J alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$(g \circ f)' = g' \circ f \times f'$$

Exercice 2.

Déterminez la dérivée de la fonction f sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans les cas suivants (u est une fonction à valeurs réelles) :

1. $f : x \mapsto \sqrt{u(x)}$ avec u une fonction à valeurs positives dérivable sur I,
2. $f : x \mapsto (u(x))^n$ avec u une fonction dérivable sur I et $n \in \mathbb{Z}^*$.
3. $f : x \mapsto u\left(x^n\right)$ avec u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
4. $f : x \mapsto u\left(ax+b\right)$ avec u une fonction dérivable sur I et a et b des réels.

Correction de l'exercice 2

1. $f' = \frac{u'}{\sqrt{u}}$ et $\mathscr{D}_{f'}$ est formé de I privé des valeurs de x qui annulent u.
2. $f' = nu'u^{n-1}$ et $\mathscr{D}_{f'} = I$.
3. $f'(x) = nx^{n-1}u'\left(x^n\right)$ et $\mathscr{D}_{f'}$.
4. $f'(x) = au'(ax+b)$ et $\mathscr{D}_{f'} = I$.

Exercice 3.

Donnez le domaine de dérivabilité et calculez la dérivée de la fonction u dans les cas suivants.

a) $u : x \mapsto \sqrt{-4x^2+16}$.

b) $u : x \mapsto 4x + 5\mathrm{e}^{-2x+3}$.

c) $u : x \mapsto \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-4x}}$.

d) $u : x \mapsto \dfrac{1}{3x^2+9x+6}$.

e) $u : x \mapsto (\sqrt{x}+3)^4$.

f) $u : x \mapsto \dfrac{3x-5}{\mathrm{e}^{3x-5}}$.

g) $u : x \mapsto (2x^3-7x)^5$.

h) $u : x \mapsto \cos(3x)$.

i) $u : x \mapsto \sqrt{3x^2+1}$.

j) $u : x \mapsto \sqrt{4x^2+4x+1}$.

k) $u : x \mapsto \sqrt{x^2-3x-2}$.

l) $u : x \mapsto \left(5x^3-4\right)^2$.

m) $u : x \mapsto (5x^4-3x+2)^6$.

n) $u : x \mapsto \left(\dfrac{1}{x+6}\right)^3$.

Correction de l'exercice 3

a) $u'(x) = -\frac{4x}{\sqrt{-4x^2+16}}$ et $\mathscr{D}_{f'} =]-2;2[$.

b) $u'(x) = 4 + -10\mathrm{e}^{-2x+3}$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

c) $u'(x) = \frac{8\mathrm{e}^{-4x}}{(1+\mathrm{e}^{-4x})^2}$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

d) $u'(x) = -\frac{6x+9}{(3x^2+9x+6)^2}$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1,-2\}$.

e) $u'(x) = 2\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+3\right)^3$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}_+^*$.

f) $u'(x) = \frac{3\mathrm{e}^{3x-5}-3(3x-5)\mathrm{e}^{3x-5}}{(\mathrm{e}^{3x-5})^2} = \frac{(-9x+18)\mathrm{e}^{3x-5}}{(\mathrm{e}^{3x-5})^2}$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

g) $u'(x) = 5(6x^2-7)(2x^3-7x)^4$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

h) $u'(x) = -3\sin(x)$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

i) $u'(x) = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

j) $u'(x) = \frac{4x+2}{\sqrt{4x^2+4x+1}}$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

k) $u'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x-2}}$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right\}$.

l) $u'(x) = 30x^2(5x^3-4)$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

m) $u'(x) = 6(20x^3-3)(5x^4-3x+2)^5$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

n) $u'(x) = \frac{-3}{(x+6)^4}$.

Exercice 4.

Donnez le domaine de dérivabilité, calculez la dérivée de la fonction u puis donnez son tableau de variation dans les cas suivants.

a) $h : x \mapsto (2x-4)\mathrm{e}^{-5x}$.

b) $h : x \mapsto \sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}$.

c) $h : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^{x} - 6$.

d) $h : x \mapsto \dfrac{77}{1+\mathrm{e}^{39-0{,}02x}} + 4$.

e) $h : x \mapsto x\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-2x} + 1 + x$.

Correction de l'exercice 4

a) $h'(x) = [2-5(2x-4)]\,\mathrm{e}^{-5x} = 2(-5x+11)\mathrm{e}^{-5x}$.

x	$-\infty$		$\frac{11}{5}$		$+\infty$
h'		$+$	0	$-$	
h	$-\infty$	↗	$\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-5}$	↘	0

b) $h'(x) = \frac{4}{(2x+1)^2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}}$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
h'		$+$	||	$+$	||	$+$	
h	1	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	1

c) $h'(x) = \mathrm{e}^{x}\,(2\mathrm{e}^{x} + 4)$. h' strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

d) $h'(x) = \frac{0{,}02\times 77\mathrm{e}^{39-0{,}02x}}{(1+\mathrm{e}^{39-0{,}02x})^2}$. h' et strictement croissante.

e) $h'(x) = [1-2(x+1)]\,\mathrm{e}^{-2x} + 1$. h est croissante.

IV Des exercices avec de la dérivation en vrac.

V Étude de la monotonie de la fonction composée. ☣

Proposition 2

Soient I et J des intervalles, $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

(i) Si f et g sont (resp. strictement) monotones de même sens de variation, alors $g \circ f$ est (resp. strictement) croissante.

(ii) Si f et g sont (resp. strictement) monotones de sens de variation contraires , alors $g \circ f$ est (resp. strictement) décroissante.

Exercice 5.

Étudiez la monotonie des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$.
3. $x \mapsto \sqrt{x}^3$ sur $\mathbb{R}_+$.