Dénombrement.

I p-uplets (ou p-listes).

Définition 1

Soient x et y deux éléments.

On appelle *couple* "x, y" et on note (x,y) l'ensemble $\{x,\{x,y\}\}$.

Proposition 1

Soient x_1, y_1, x_2, y_2 des éléments.

$(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ si et seulement si

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}.$$

Définition 2

Soient :

. E et F des ensembles.

Nous appellerons *produit cartésien de* E et F l'ensemble que nous noterons $E \times F$ formé de tous les couples (x,y) où $x \in E$ et $y \in F$.

Proposition 2

Soit E une ensemble fini non vide de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

Le nombre de n-liste de E est $|E|^n$.

II Arrangements.

1 Arrangements.

Définition 3

Soient :

. E un ensemble fini non vide,

. $p \in \mathbb{N}^*$.

Nous appellerons *p-arrangement de E* (ou arrangement de p éléments de E), tout p-uplet d'éléments de E deux à deux distincts.

Proposition 3

Soient :

. $p \in \mathbb{N}^*$,

. $n \in \mathbb{N}^*$,

. E un ensemble de cardinal n.

Le nombre de p-arrangements de E est

$$A_n^p = \begin{cases} 0 & \text{si } p > n \\ n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) & \text{si } 0 < p < n \\ 1 & \text{si } p = 0 \end{cases}$$

2 Permutations.

Définition 4

Soient :

. $n \in \mathbb{N}^*$,

. E un ensemble de cardinal n.

Nous appellerons permutation de E tout n-arrangement d'éléments de E.

III Combinaisons.

1 Définition.

Définition 5

Nous appellerons combinaisons de p éléments de E (ou p-combinaison) toute partie de E de cardinal p.

Proposition 4

Le nombre de p-combinaisons de E se note $\binom{n}{p}$ et est appelé coefficient binomial p parmi n.
Si $p > n$ alors

$$\binom{n}{p} = 0.$$

Si $0 \leqslant p \leqslant n$ alors

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

2 Propriétés des coefficients binomiaux.

Proposition 5

Soient :

. $n \in \mathbb{N}$,

. $p \in [\![0,n]\!]$.

(i) $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

(ii) $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

3 Formule du binôme de Newton.

Proposition 6

Pour tous nombres complexes a et b et pour tout entier naturel n non nul

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

IV Exercices.