Dénombrement.

Produit cartésien, p-uplets (ou p-listes).

Définition 1. Soient x et y deux éléments. On appelle *couple* "x, y" et on note (x,y) l'ensemble $\{x,\{x,y\}\}$.

Proposition 1. Soient x_1, y_1, x_2, y_2 des éléments. $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ si et seulement si $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$.

Définition 2. Soient E et F des ensembles. Nous appellerons *produit cartésien de* E et F l'ensemble que nous noterons $E \times F$ formé de tous les couples (x,y) où $x \in E$ et $y \in F$.

Remarques.

1. Si $E = F$ plutôt que d'écrire $E \times E$ nous écrirons E^2.
   De même $E \times E \times E = E^3$.
2. En itérant le procédé nous définirions, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les n-uplets (ou n-listes) : $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ où $x_1 \in E_1$, ..., $x_n \in E_n$. L'ensemble des n-uplets est encore appelé produit cartésien et est noté $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$.
3. Nous appellerons n-liste de E un élément de E^n.
4. Deux p-listes sont égales si elles sont constituées des mêmes éléments dans le même ordre.
5. Les éléments d'une p-liste ne sont pas forcément distincts.
6. Les coordonnées de vecteurs du plan sont des 2-listes de $\mathbb{R}$.

Exemples.

1. Les 2-listes de $E = \{a,b,c\}$ sont (a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c). (a,a,b,c,a) et (a,b,a,c,a) sont deux 5-listes de E distinctes.
2. $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels. Il peut être vu comme l'ensemble des coordonnées des points dans un espace affine muni d'un repère cartésien.
3. $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des coordonnées de l'espace affine euclidien muni d'un repère.
4. L'univers d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, dont le succès est noté S, est $\Omega = \{S,\overline{S}\}^n$ et les issues sont des n-uplets formés de S et de $\overline{S}$.

Proposition 2. Soit E une ensemble fini non vide de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de n-liste de E est $|E|^n$.

Démonstration. En raisonnant avec un arbre.

Exemples.

1. Le nombre de 2-listes de $E = \{a,b,c\}$ est $3^2 = 9$.
2. Les mots peuvent être vus comme des p-listes. Le nombre de mots de 10 lettres que l'on peut former avec les 26 lettres de l'alphabet est 26^{10}.

Proposition 3. Soient E et F des ensembles finis. $|E \times F| = |E| \times |F|$.

Remarques.

1. On parle également de principe multiplicatif ou de principe des bergers.
2. C'est un ensemble que nous avons déjà schématisé avec des arbres probabilistes lors de tirage successifs.

Exemples.

1. Chaque case d'une grille de bataille navale est codée par une couple formé d'une lettre entre A et F puis d'un nombre entre 1 et 8. Donc le nombre de case est 7×8.

Arrangements.

Définition 3. Soient E un ensemble fini non vide, $p \in \mathbb{N}^*$. Nous appellerons *p-arrangement de E* (ou arrangement de p éléments de E), tout p-uplet d'éléments de E deux à deux distincts.

Exemples.

1. Les 2-arrangements de $E = \{a,b,c\}$ sont (a,b), (b,a), (a,c) (c,a), (b,c) et (c,b).
2. Si le mot « math » est un 4-arrangement de lettres de l'alphabet, « mathématique » n'en n'est pas un car il ya répétition de lettres.

Proposition 4. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, E un ensemble de cardinal n. Le nombre de p-arrangements de E est $A_n^p = \begin{cases} 0 & \text{si } p > n \\ n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) & \text{si } 0 < p < n \\ 1 & \text{si } p = 0 \end{cases}$

Démonstration.

1. Si $p > n$ nous ne pourrons trouver p éléments distincts dans E.
2. Si $0 < p < n$ il s'agit d'interpréter la situation comme un tirage sans remise de p boules dans une urne en contenant n.
3. Si $p = 0$ c'est une convention.

Remarques.

1. Autrement dit si $p \in [\![0,n]\!]$, $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Exemples.

1. Le nombre de 2-arrangements de $E = \{a,b,c\}$ est $A_3^2 = 3 \times (3-2+1) = 6$.
2. $A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$.

Définition 4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un ensemble de cardinal n. Nous appellerons *permutation de E* tout n-arrangement d'éléments de E.

Exemples.

1. L'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$ est $\mathfrak{S}_n$.
2. En français les permutations des lettres d'un mot sont appelés ses anagrammes.
3. Une permutation est une bijection de E sur E.
4. Il y a $n!$ permutations sur E de cardinal n.

Combinaisons.

Définition 5. Nous appellerons combinaisons de p éléments de E (ou p-combinaison) toute partie de E de cardinal p.

Remarques.

1. Nous retrouvons l'idée des chemins comptant le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli peu importe dans quel ordre. Si E est l'ensemble des niveaux de l'arbre (donc au nombre de n), peu importe à quels niveaux il y a eu succès ce qui importe c'est le nombre (p) de succès.

Proposition 5. Le nombre de p-combinaisons de E se note $\binom{n}{p}$ et est appelé coefficient binomial p parmi n.

Si $p > n$ alors $\binom{n}{p} = 0$.

Si $0 \leqslant p \leqslant n$ alors $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démonstration. Si $p > n$ il n'existe pas d $\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!}$.

Exemples.

1. En particulier on retiendra $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$.

Proposition 6. Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in [\![0,n]\!]$. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ et $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

Remarques.

1. Triangle de Pascal.

EXERCICE 1. Démontrez que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Exercice 1. On fait la somme des parties de E avec 0 éléments, puis 1 élément, puis 2, ..., jusqu'à n éléments.

EXERCICE 2. Démontrez $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

EXERCICE 3. Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\binom{n}{n-1} = n$.

b) $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)! = (n+1)n!$.

d) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n}$.

Proposition 7. Pour tous nombres complexes a et b et pour tout entier naturel n non nul $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Démonstration. Une démonstration par récurrence un peu difficile du fait du changement d'indice dans des sommes discrètes et utilisant la précédente proposition.

EXERCICE 4. Soit $(p,q) \in]0,1[^2$ tel que $p+q=1$. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \prod_{k=0}^{n} \exp\left(\binom{n}{k} p^k q^{n-k}\right)$.

1. Déterminez $\ln(P_n)$.
2. Déduisez-en P_n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercices.

EXERCICE 5. Une urne contient quatre boules blanches et trois boules noires On tire simultanément trois boules de l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages possibles ne comportant que des boules blanches ?
3. Combien y a-t-il de tirages unicolores ?
4. Combien y a-t-il de tirages comportant une boule blanche et deux boules noires ?

EXERCICE 6. On choisit au hasard simultanément quatre cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages possibles comportant le roi de cœur ?
3. Combien y a-t-il de tirages comportant quatre cœurs ?
4. Combien y a-t-il de tirages ne comportant aucun as ?

EXERCICE 7. Le code d'une carte de crédit est formé de quatre chiffres distincts.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?
2. Combien y a-t-il de codes ne comportant que des chiffres pairs ?
3. Combien y a-t-il de codes commençant par le chiffre 2 ?

EXERCICE 8. Un numéro de téléphone est constitué de 10 chiffres dont le premier est 0 et les neuf autres quelconques.

1. Combien y a-t-il de numéros possibles ?
2. Combien y a-t-il de numéros possibles commençant par 06 ?
3. Calculez le nombre de numéros contenant

(a) les dix chiffres,

(b) exactement 3 fois le chiffre 6.

EXERCICE 9. Un code est formé d'une lettre suivie de trois chiffres.

1. Combien y a-t-il de chiffres possibles ?
2. Combien y a-t-il de codes commençant par la lettre A ?
3. Combien y a-t-il de codes commençant par A et contenant les chiffres 1, 2 et 3 ?

EXERCICE 10. Un fleuriste dispose de 5 roses, trois tulipes, deux tournesols et quatre feuillages décoratifs pour composer un bouquet.

1. Combien de bouquets constitués de trois fleurs et d'un feuillage peut-il composer ?
2. Il décide de mettre une fleur de chaque espèce avec un feuillage pour constituer son bouquet. Quel est le nombre de bouquets possibles ?

EXERCICE 11. Lors d'une course hippique on peut parier sur les cinq premiers chevaux à l'arrivée. On parle alors de quinté. 15 chevaux, numérotés de 1 à 15, sont au départ. Combien y a-t-il de quintés différents :

1. en tenant compte de l'ordre ?
2. sans tenir compte de l'ordre ?

EXERCICE 12. Une urne contient 100 jetons numérotés de 1 à 100. On tire simultanément deux jetons de l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possible ?
2. Quelle est la probabilité de tirer deux numéros pairs ?
3. Parmi les événements suivants, quel est le plus probable ?

   (a) A : « la somme des numéros est paire »,

   (b) B : « la somme des numéros est impaire ».

EXERCICE 13. Combien peut-on former de mots de 5 lettres

1. comportant des lettres différentes ?
2. commençant par une voyelle et finissant par une consonne ?
3. contenant exactement une voyelle ?

EXERCICE 14.

EXERCICE 15. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : x \mapsto (1+x)^n$.

1. Calculez f' à partir de l'expression factorisée de f puis à partir de son expression développée.
2. Démontrez $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \times 2^{n-1}$.

EXERCICE 16.

EXERCICE 17. La fonction dérivée d'une fonction f est notée f'. La dérivée de la fonction dérivée, notée f'' ou $f^{(2)}$, est appelée la *dérivée seconde* ou *dérivée d'ordre* 2. Nous définirons plus généralement le *fonction dérivée d'ordre* n (n entier naturel) d'une fonction la fonction obtenue en dérivant n fois la fonction f et nous la noterons $f^{(n)}$.

Soient u et v des fonctions indéfiniment dérivables. Déterminez la dérivée d'ordre n de la fonction produit uv.

EXERCICE 18. Montrez : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall r \in [\![1,n]\!]$, $\binom{n}{r} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1}$.

Exercice 18. Par récurrence sur n.

EXERCICE 19. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)$.

1. Que valent $P_n(0)$, $P_n(-1)$ et $P_n(-n)$?
2. Démontrez que pour tout réel non nul x, on a $P_n(x) = \frac{x+n}{x} P_n(x-1)$.

3. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, écrire $P_n(p)$ comme coefficient du binôme.

EXERCICE 20. Démontrez que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Exercice 20. On fait la somme des parties de E avec 0 éléments, puis 1 élément, puis 2, ..., jusqu'à n éléments. Ou on applique la formule du binôme de Newton.

EXERCICE 21. Démontrez $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

EXERCICE 22. Soit n un entier naturel. Une urne contient n boules rouges et n boules vertes. On tire les boules de l'urne les unes après les autres jusqu'à ce que l'urne soit vide, en notant au fur et à mesure la couleur de la boule tirée : R pour rouge et V pour verte.

1. (a) Faire le lien entre le résultat obtenu et l'ensemble $E = \{R,V\}$.
   (b) Montrez que le nombre de ces $2n$-uplets est $\binom{2n}{n}$.
2. Considérons un jeu. On gagne 1 € à chaque tirage d'une boule de couleur différente de la boule précédemment tirée ; sinon on ne gagne rien. La partie est finie lorsque l'urne est vide.
   (a) Calculez la probabilité de gagner exactement 1 € lors d'une partie.
   (b) Calculer la probabilité de gagner 2 € lors d'une partie.
   (c) Soit k un entier naturel tel que $2 \leqslant k \leqslant 2n$. Calculez, en fonction de n, la probabilité de gagner au k-ième tirage. Cette probabilité dépend-elle du rang k ?

EXERCICE 23.

1. Un sac contient contient 5 boules indiscernables sur lesquelles sont écrites les lettre A, B, C, D et E.
   On tire une boule au hasard, on note la lettre, et on remet la boule dans l'urne. On répète trois fois cette action. On obtient ainsi un mot de trois lettres.
   À l'aides des coefficients binomiaux écrivez :
   (a) le nombre de mots que l'on peut obtenir ayant trois lettres différentes, sans tenir compte de l'ordre ;
   (b) le nombre de mots que l'on peut obtenir ayant deux lettres différentes et une lettre commune ;
   (c) le nombre de mots que l'on peut obtenir ayant trois lettres différentes.
2. Dans une combinaison avec combinaison de k objets pris parmi n objets distincts, un même objet peut être sélectionné plusieurs fois. On veut montrer que ce nombre de combinaison est égale à $\binom{n+k-1}{k}$.
   On symbolise les k objets par une ligne de O. Un répartition avec n objets distincts consiste alors à mettre des barres de séparation ente les objets. Le nombre de O entre deux barres signifie le nombre de fois qu'un même objet a été sélectionné.
   Par exemple avec $k = 8$ et $n = 5$:

$$OOO||OO|OO|O$$

$$O|OOO|O|OO|O$$

$$OO|O|OOO||OO$$

   Deux barres côte à côte signifie qu'il y a zéro objets d'un certain type.
   (a) Dans chacun des trois exemples ci-dessus, quel est le nombre total de symboles (barres et O) utilisés et quel est le nombre de barres ?
   Quelle conjecture peut-on donc faire sur le nombre de combinaisons avec répétitions de huit objets parmi cinq ?

(b) On admet que le problème se ramène donc au choix de $n-1$ objets parmi $n+k-1$. Justifiez l'égalité $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$.

3. Quatre amies se rendent dans un salon de thé où huit thés différents sont proposés. Combien de plateaux de quatre tasses de thés, différentes ou non, pourra leur amener le serveur ?

Exercice 23. Par récurrence sur n.