Dénombrement.

I p-uplets (ou p-listes).

Définition 1

Soient x et y deux éléments.

On appelle *couple* "x, y" et on note (x,y) l'ensemble $\{x,\{x,y\}\}$.

Proposition 1

Soient x_1, y_1, x_2, y_2 des éléments.

$(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ si et seulement si

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}.$$

Définition 2

Soient :

. E et F des ensembles.

Nous appellerons *produit cartésien de* E et F l'ensemble que nous noterons $E \times F$ formé de tous les couples (x,y) où $x \in E$ et $y \in F$.

Remarques.

1. Si $E = F$ plutôt que d'écrire $E \times E$ nous écrirons E^2.
   De même $E \times E \times E = E^3$.
2. En itérant le procédé nous définirions, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les n-uplets (ou n-listes) : $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ où $x_1 \in E_1$, ..., $x_n \in E_n$.
   L'ensemble des n-uplets est encore appelé produit cartésien et est noté $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$.
3. Nous appellerons n-liste de E un élément de E^n.
4. Deux p-listes sont égales si elles sont constituées des mêmes éléments dans le même ordre.
5. Les éléments d'une p-liste ne sont pas forcément distincts.
6. Les coordonnées de vecteurs du plan sont des 2-listes de $\mathbb{R}$.

Exemples.

1. Les 2-listes de $E = \{a,b,c\}$ sont (a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c).
   (a,a,b,c,a) et (a,b,a,c,a) sont deux 5-listes de E distinctes.
2. $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels. Il peut être vu comme l'ensemble des coordonnées des points dans un espace affine muni d'un repère cartésien.
3. $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des coordonnées de l'espace affine euclidien muni d'un repère.
4. L'univers d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, dont le succès est noté S, est $\Omega = \{S,\overline{S}\}^n$ et les issues sont des n-uplets formés de S et de $\overline{S}$.

Proposition 2

> Soit E une ensemble fini non vide de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
>
> Le nombre de n-liste de E est $|E|^n$.

Démonstration

En raisonnant avec un arbre.

■

Exemples.

1. Le nombre de 2-listes de $E = \{a,b,c\}$ est $3^2 = 9$.
2. Les mots peuvent être vus comme des p-listes. Le nombre de mots de 10 lettres que l'on peut former avec les 26 lettres de l'alphabet est 26^{10}.

II Arrangements.

1 Arrangements.

Définition 3

> Soient :
>
> . E un ensemble fini non vide,
>
> . $p \in \mathbb{N}^*$.
>
> Nous appellerons *p-arrangement de E* (ou arrangement de p éléments de E), tout p-uplet d'éléments de E deux à deux distincts.

Exemples.

1. Les 2-arrangements de $E = \{a,b,c\}$ sont (a,b), (b,a), (a,c) (c,a), (b,c) et (c,b).
2. Si le mot « math » est un 4-arrangement de lettres de l'alphabet, « mathématique » n'en n'est pas un car il ya répétition de lettres.

Proposition 3

Soient :

. $p \in \mathbb{N}^*$,

. $n \in \mathbb{N}^*$,

. E un ensemble de cardinal n.

Le nombre de p-arrangements de E est

$$A_n^p = \begin{cases} 0 & \text{si } p > n \\ n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) & \text{si } 0 < p < n \\ 1 & \text{si } p = 0 \end{cases}$$

Démonstration

1. Si $p > n$ nous ne pourrons trouver p éléments distincts dans E.
2. Si $0 < p < n$ il s'agit d'interpréter la situation comme un tirage sans remise de p boules dans une urne en contenant n.
3. Si $p = 0$ c'est une convention.

■

Remarques.

1. Autrement dit si $p \in [\![0,n]\!]$,

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Exemples.

1. Le nombre de 2-arrangements de $E = \{a,b,c\}$ est $A_3^2 = 3 \times (3-2+1) = 6$.
2. $A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$.

2 Permutations.

Définition 4

Soient :

. $n \in \mathbb{N}^*$,

. E un ensemble de cardinal n.

Nous appellerons permutation de E tout n-arrangement d'éléments de E.

Exemples.

1. L'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$ est $\mathfrak{S}_n$.
2. En français les permutations des lettres d'un mot sont appelés ses anagrammes.
3. Une permutation est une bijection de E sur E.
4. Il y a $n!$ permutations sur E de cardinal n.

III Combinaisons.

1 Définition.

Définition 5

Nous appellerons combinaisons de p éléments de E (ou p-combinaison) toute partie de E de cardinal p.

Remarques.

1. Nous retrouvons l'idée des chemins comptant le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli peu importe dans quel ordre. Si E est l'ensemble des niveaux de l'arbre (donc au nombre de n), peu importe à quels niveaux il y a eu succès ce qui importe c'est le nombre (p) de succès.

Proposition 4

Le nombre de p-combinaisons de E se note $\binom{n}{p}$ et est appelé coefficient binomial p parmi n.
Si $p > n$ alors
$$\binom{n}{p} = 0.$$
Si $0 \leqslant p \leqslant n$ alors
$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Démonstration
Si $p > n$ il n'existe pas d $\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!}$.
■

Exemples.

1. En particulier on retiendra $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$.

2 Propriétés des coefficients binomiaux.

Proposition 5

Soient :

. $n \in \mathbb{N}$,

. $p \in [\![0,n]\!]$.

(i) $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

(ii) $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

Exercice 1. ☯

Démontrez que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Correction de l'exercice 1
On fait la somme des parties de E avec 0 éléments, puis 1 élément, puis 2, ..., jusqu'à n éléments.

Exercice 2.

Démontrez $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

Triangle de Pascal.

Exercice 3.

Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\binom{n}{n-1} = n$.
2. $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)! = (n+1)n!$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n}$.

3 Formule du binôme de Newton.

Proposition 6

Pour tous nombres complexes a et b et pour tout entier naturel n non nul

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration

Une démonstration par récurrence un peu difficile du fait du changement d'indice dans des sommes discrètes.

■

Exercice 4.

Soit $(p,q) \in]0,1[^2$ tel que $p+q=1$.
Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \prod_{k=0}^{n} \exp\left(\binom{n}{k} p^k q^{n-k}\right)$.

1. Déterminez $\ln(A_n)$.
2. Déduisez-en A_n pour $n \in \mathbb{N}$.

IV Exercices.

Exercice 5.

Une urne contient quatre boules blanches et trois boules noires On tire simultanément trois boules de l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages possibles ne comportant que des boules blanches ?
3. Combien y a-t-il de tirages unicolores ?
4. Combien y a-t-il de tirages comportant une boule blanche et deux boules noires ?

Exercice 6.

On choisit au hasard simultanément quatre cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages possibles comportant le roi de cœur ?
3. Combien y a-t-il de tirages comportant quatre cœurs ?
4. Combien y a-t-il de tirages ne comportant aucun as ?

Exercice 7.

Le code d'une carte de crédit est formé de quatre chiffres distincts.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?
2. Combien y a-t-il de codes ne comportant que des chiffres pairs ?
3. Combien y a-t-il de codes commençant par le chiffre 2 ?

Exercice 8.

Un numéro de téléphone est constitué de 10 chiffres dont le premier est 0 et les neuf autres quelconques.

1. Combien y a-t-il de numéros possibles ?
2. Combien y a-t-il de numéros possibles commençant par 06 ?
3. Calculez le nombre de numéros contenant
   (a) les dix chiffres,
   (b) exactement 3 fois le chiffre 6.

Exercice 9.

Un code est formé d'une lettre suivie de trois chiffres.

1. Combien y a-t-il de chiffres possibles ?
2. Combien y a-t-il de codes commençant par la lettre A ?
3. Combien y a-t-il de codes commençant par A et contenant les chiffres 1, 2 et 3 ?

Exercice 10.

Un fleuriste dispose de 5 roses, trois tulipes, deux tournesols et quatre feuillages décoratifs pour composer un bouquet.

1. Combien de bouquets constitués de trois fleurs et d'un feuillage peut-il composer ?
2. Il décide de mettre une fleur de chaque espèce avec un feuillage pour constituer son bouquet. Quel est le nombre de bouquets possibles ?

Exercice 11.

Lors d'une course hippique on peut parier sur les cinq premiers chevaux à l'arrivée. On parle alors de quinté. 15 chevaux, numérotés de 1 à 15, sont au départ.
Combien y a-t-il de quintés différents :

1. en tenant compte de l'ordre ?
2. sans tenir compte de l'ordre ?

Exercice 12.

Une urne contient 100 jetons numérotés de 1 à 100. On tire simultanément deux jetons de l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possible ?
2. Quelle est la probabilité de tirer deux numéros pairs ?
3. Parmi les événements suivants, quel est le plus probable ?
   (a) A : « la somme des numéros est paire »,
   (b) B : « la somme des numéros est impaire ».

Exercice 13.

Combien peut-on former de mots de 5 lettres

1. comportant des lettres différentes ?
2. commençant par une voyelle et finissant par une consonne ?
3. contenant exactement une voyelle ?

Exercice 14.

Exercice 15.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : x \mapsto (1+x)^n$.

1. Calculez f' à partir de l'expression factorisée de f puis à partir de son expression développée.
2. Démontrez
$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \times 2^{n-1}.$$

Exercice 16.

Exercice 17. - Formule de Leibniz

La fonction dérivée d'une fonction f est notée f'. La dérivée de la fonction dérivée, notée f'' ou $f^{(2)}$, est appelée la *dérivée seconde* ou *dérivée d'ordre 2*.
Nous définirons plus généralement le *fonction dérivée d'ordre n* (n entier naturel) d'une fonction la fonction obtenue en dérivant n fois la fonction f et nous la noterons $f^{(n)}$.

Soient u et v des fonctions indéfiniment dérivables.
Déterminez la dérivée d'ordre n de la fonction produit uv.

Exercice 18.

Montrez :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall r \in [\![1,n]\!],\ \binom{n}{r} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1}.$$

Correction de l'exercice 18

Par récurrence sur n.

Exercice 19.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k}\right)$.

1. Que valent $P_n(0)$, $P_n(1)$ et $P_n(-n)$?
2. Démontrez que pour tout réel non nul x, on a

$$P_n(x) = \frac{x+n}{x} P_n(x-1).$$

3. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, écrire $P_n(p)$ comme coefficient du binôme.