

Cardinal.

Dans cette leçon n et p désignent des entiers naturels non nuls.

I Ensembles finis.

Exercice 1. ☹

Soient E et F des ensembles finis de cardinaux respectifs n et p . $f : E \rightarrow F$ une application.

Conjecturez la comparaison de $|E|$ et $|F|$ dans les cas suivants :

1. si $E \subset F$,
2. si f est injective,
3. si f est surjective,
4. si f est une bijection.

Exercice 2.

Soient E et F des ensembles finis de cardinaux respectifs n et p .

Comparez $|E|$, $|F|$, $|E \cap F|$ et $|E \cup F|$?

Exercice 3. ☹

Soient E et F des ensembles finis de cardinaux respectifs n et p .

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

Montrez que f est bijective si et seulement si deux des conditions suivantes sont vraies.

- (i) f est surjective,
- (ii) f est injective,
- (iii) $n = p$

Exercice 4. ☹

Soient E et F des ensembles finis de cardinaux respectifs n et p .

1. Déterminez le nombre d'applications de E dans F en fonction de n et p .
2. Déterminez le nombre de permutations de E en fonction de n . Une permutation de E est une bijection de E sur E .
3. En supposant que $n \leq p$, déterminez le nombre d'injections de E dans F .

Indication. Vous pourrez avantageusement représenter la situation avec des arbres.

Exercice 5. ☹

Soient E et F des ensembles finis de cardinaux respectifs n et p .

Si F est une partie de E alors le **complémentaire** de F dans E , et on note \overline{F} ou $\mathbb{C}_E F$, est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas éléments de F : $\overline{F} = \{x \in E | x \notin F\}$.

Conjecturez, si $F \subset E$, l'expression de $|\overline{F}|$ en fonction de n et p .

Exercice 6. ☹

Soient E et F des ensembles finis de cardinaux respectifs n et p .
Exprimez $|E \times F|$ en fonction de n et p .

Exercice 7.

Soient E un ensemble fini de cardinal n et $p \geq 3$ un entier naturel.
Exprimez $|E^p|$ en fonction de n et p .

Exercice 8. ☹

Soit E un ensemble fini de cardinal n .

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties (sous-ensembles) de E . Par exemple si $E = \{a, b, c\}$ alors

$$\mathcal{P}(E) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, E \};$$

dans cet exemple $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 8$.

Conjecturez l'expression de $\text{card}(\mathcal{P}(E))$ en fonction de n .

II Ensembles infinis.

Exercice 9. ☹

Démontrez que l'ensemble des nombres premiers est infinis.

Exercice 10.

Démontrez que les ensembles suivants ont le même cardinal que $\mathbb{N} : \mathbb{N}^*$, l'ensemble des entiers naturels pairs, l'ensemble des entiers naturels impairs.