Cardinal.

Dans cette leçon n et p désignent des entiers naturels non nuls.

I Ensembles finis.

Définition 1

On dit qu'un ensemble E est *fini* s'il existe un entier naturel non nul n et une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur E ou si E est vide.

Remarques.

1. Si E est non vide le nombre n est appelé le *cardinal* de E et est noté $|E|$.
2. Si E est vide alors on pose $|E| = 0$.

Exercice 1. ☯

Soient E et F des ensembles finis de cardinaux respectifs n et p. $f : E \to F$ une application.
Conjecturez la comparaison de $|E|$ et $|F|$ dans les cas suivants :

1. si $E \subset F$,
2. si f est injective,
3. si f est surjective,
4. si f est une bijection.

Exercice 2.

Soient E et F des ensembles finis de cardinaux respectifs n et p.
Comparez $|E|$, $|F|$, $|E \cap F|$ et $|E \cup F|$?

$|E \cap F| \leqslant \min(|E|,|F|) \leqslant \max(|E|,|F|) \leqslant |E \cup F|$ et bien sûr $|E \cup F| + |E \cap F| = |E| + |F|$.

Exercice 3. ☯

Soient E et F des ensembles finis de cardinaux respectifs n et p.
Soit $f : E \to F$ une application.
Montrez que f est bijective si et seulement si deux des conditions suivantes sont vraies.

(i) f est surjective,
(ii) f est injective,
(iii) $n = p$

Exercice 4. ☯

Soient E et F des ensembles finis de cardinaux respectifs n et p.

1. Déterminez le nombre d'applications de E dans F en fonction de n et p.
2. Déterminez le nombre de permutations de E en fonction de n. *Une permutation de E est une bijection de E sur E.*
3. En supposant que $n \leq p$, déterminez le nombre d'injections de E dans F.

Indication. Vous pourrez avantageusement représenter la situation avec des arbres.

Correction de l'exercice 4

1. On peut construire un arbre dont chaque niveau correspond au choix d'une image, dans F, d'un élément de E.
   $\left|F^E\right| = p^n$.
2. Même idée que précédemment mais avec un tirage sans remise. Un élément de F déjà choisi ne peut plus être utilisé comme une image.
   $|\mathfrak{S}_n| = n!$.
3. Même que précédemment.
   $p \times (p-1) \times \cdots \times (p-n+1) = \frac{p!}{(p-n)!}$.

Exercice 5. ☯

Soient E et F des ensembles finis de cardinaux respectifs n et p.
Si F est une partie de E alors le *complémentaire* de F dans E, et on note $\overline{F}$ ou $\complement_E F$, est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas éléments de F : $\overline{F} = \{x \in E | x \notin F\}$.
Conjecturez, si $F \subset E$, l'expression de $\left|\overline{F}\right|$ en fonction de n et p.

Correction de l'exercice 5

$\operatorname{card}\left(\overline{F}\right) = n - p$

Exercice 6. ☯

Soient E et F des ensembles finis de cardinaux respectifs n et p.
Exprimez $|E \times F|$ en fonction de n et p.

Correction de l'exercice 6

$\operatorname{card}(E \times F) = n \times p$

Exercice 7.

Soient E un ensemble fini de cardinal n et $p \geq 3$ un entier naturel.
Exprimez $|E^p|$ en fonction de n et p.

Correction de l'exercice 7

$\operatorname{card}(E^p) = n^p$

Exercice 8. ☕

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties (sous-ensembles) de E. Par exemple si $E = \{a,b,c\}$ alors

$$\mathcal{P}(E) = \{\ \varnothing\ ,\ \{a\}\ ,\ \{b\}\ ,\ \{c\}\ ,\ \{a,b\}\ ,\ \{b,c\}\ ,\ \{a,c\}\ ,\ E\ \};$$

dans cet exemple $\operatorname{card}(\mathcal{P}(E)) = 8$.
Conjecturez l'expression de $\operatorname{card}(\mathcal{P}(E))$ en fonction de n.

Correction de l'exercice 8

$|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$.

démonstration 1 Il y a autant d'éléments dans $\mathcal{P}(E)$ que d'applications de $\mathcal{P}(E)$ dans $\{0;1\}$. Il suffit de considérer $A \mapsto \chi_A$ où χ_A désigne la fonction indicatrice (ou caractéristique)de A.

démonstration 2 Par récurrence sur la taille de E. On ajoute un élément a et on distingue les parties contenant a de celles ne contenant pas a.

II Ensembles infinis.

Les raisonnements sur les ensembles infinis sont souvent peu aisés et paradoxaux : existe-t-il un ensemble de tous les ensembles ?

C'est en utilisant la notion de bijection que l'on peut comparer des infinis.

Définition 2

Un ensemble est dit *infini* s'il n'est pas fini.

Exercice 9. ☯

Démontrez que l'ensemble des nombres premiers est infinis.

Raisonnement par l'absurde.

Supposons que l'ensemble E des nombres premiers est fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$: $E = \{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$.

Alors $q = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1 \notin E$. Donc q n'est pas premier.

D'après le théorème fondamental de l'algèbre q est donc divisible par un nombre premier : $\exists j \in [\![1,n]\!]$, $p_j | q$.

De $q = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1$ nous déduisons : $0 = 0 + 1 \mod (p_j)$.

Ce qui est impossible donc E n'est pas fini.

Définition 3

Un ensemble est dit *dénombrable* s'il a un cardinal inférieur ou égale à celui de $\mathbb{N}$.
$|\mathbb{N}|$ est noté par une lettre hébraïque $\aleph_0$ et est appelé *aleph zéro*.

Remarques.

1. Pour démontrer qu'un ensemble est dénombrable il suffit de montrer qu'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.
2. Autrement dit E est dénombrable si je parviens à construire une suite qui contient tous les éléments de E.

Exercice 10.

Démontrez que les ensembles suivants ont le même cardinal que $\mathbb{N}$: $\mathbb{N}^*$, l'ensemble des entiers naturel pairs, l'ensemble des entiers naturels impairs.

Correction de l'exercice 10

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N}^* \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}\right.$$

En notant $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres pairs :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{P} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \overline{\mathbb{P}} \\ n & \mapsto & 2n+1 \end{array}\right.$$

Des résultats peu évidents à démontrer.

1. Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable. Autrement dit $\aleph_0$ est le plus petit cardinal infini.
2. $\mathbb{Q}$ est dénombrable. On retrouve un exemple du paradoxe suivant : une partie est aussi grande que le tout.
3. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable et $\text{card}(\mathbb{R}) = \aleph_1$. On parle aussi de puissance du continu.
4. Les ensembles E et $\mathcal{P}(E)$ n'ont pas le même cardinal.