Table des matières

Algèbre. 5

1. Dénombrement. 7

I Produit cartésien, p-uplets (ou p-listes). . . . 7
II Arrangements. . . . 8
III Combinaisons. . . . 8
IV Exercices. . . . 9
V Corrections. . . . 11

Analyse réelle. 15

2. Dérivation. 17

I Nombre dérivé. . . . 17
II Tangente. . . . 18
III Fonction dérivée. . . . 18
IV Fonctions puissances. . . . 18
V Linéarité de la dérivation. . . . 19
VI Dérivation d'un produit. . . . 19
VII Composition et dérivation. . . . 20
VIII Dérivation de la fonction inverse. . . . 21
IX Dérivation d'un quotient. . . . 21
X D'autres fonctions puissances. . . . 21
XI Dérivation de la fonction racine carrée. . . . 21
XII Dérivation et variation. . . . 21
XIII Étude d'une fonction, allure d'une courbe. . . . 24
XIV Exercices. . . . 24
XV Corrections. . . . 27

3. Convexité, dérivée seconde. 35

I Définition. . . . 35
II Caractérisations pour les fonctions une fois dérivables. . . . 38
III Caractérisation pour les fonctions deux fois dérivables. . . . 39
IV Inégalités. . . . 39
V Exercices. . . . 40
VI Corrections. . . . 44

4. Limites de fonctions. **49**
I Étude d'une fonction, étude des limites. 49
II Voisinage d'une valeur a. 49
III Définition de la limite d'une fonction en a. 50
IV Définition de la limite d'une fonction en a par valeurs inférieures ou supérieures. 51
V Interprétation géométrique des limites finies en l'infini. 52
VI Interprétation géométrique des limites infinies en un réel. 52
VII Exemples de référence. 52
VIII Opérations sur les limites. 53
IX Lever l'indétermination : expressions polynomiales et factions rationnelles. . . 55
X Lever une indétermination : factoriser pour faire apparaître une croissance comparée. 55
XI Limites et compositions. 56
XII Théorème du point fixe. 57
XIII Exercices. 58
XIV Corrections. 59

5. Continuité. **65**
I Un exemple. 65
II Définition. 65
III Les fonctions continues de références. 66
IV Des procédés pour construire des fonctions continues à partir d'autres fonctions continues. 66
V Une condition suffisante de continuité. 66
VI Théorème des valeurs intermédiaires. 67
VII Théorème des valeurs intermédiaires avec des fonctions strictement monotones. 67
VIII Exercices. 69
IX Corrections. 71
X Exercices. 74

6. L'intégrale de Riemann. **77**
I Calcul de l'aire sous la courbe. 77
II Théorèmes fondamentaux de l'analyse. 80
III Intégrales, propriétés. 85
IV Intégrer des fonctions paires ou impaires sur une partie symétrique par rapport à 0. 87
V Valeur moyenne d'une fonction. 87
VI Intégration par parties. 89
VII Calculer l'aire entre deux courbes. 93
VIII Exercices. 94
IX Corrections 94

Suites et séries. **105**

7. Suites convergentes. **107**
I Définitions et vocabulaire. 107
II Suite des inverses. 108
III Suite inverse de racine carrée. 109
IV Unicité de la limite. 110

V Suite bornée. 111
VI Opérations sur les limites. 111
VII Comparaison de limites. 112
VIII Théorème de la limite monotone. 113
IX Exercices. 114
X Corrections. 115

8. Suites divergentes, limite infinie. 117
I Définition. 117
II Suite des entiers. 118
III Suite des racines carrées. 118
IV Unicité de la limite. 118
V Suite bornée. 118
VI Opérations sur les limites finies et infinies. 119
VII Opérations sur les limites infinies. 120
VIII Lever une indétermination : factoriser par la plus grande puissance de n. 120
IX Lever une indétermination : limite inverse en zéro. 121
X Comparaison de limites. 121
XI Théorème de la limite monotone. 121
XII Suites géométriques-exponentielles. 121
XIII Lever une indétermination : croissance comparée. 122
XIV Exercices. 123
XV Corrections. 129

Géométrie dans l'espace. 137

9. Vecteurs de l'espace, combinaisons linéaires, bases. 139
I Espace vectoriel euclidien. 139
II Combinaisons linéaires. 139
III Indépendance linéaire. 141
IV Vecteur directeur d'une droite. 142
V Direction d'un plan. 144
VI Base de l'espace. 146
VII Norme d'un vecteur. 149
VIII Changement de base. 149
IX Corrections. 149

10. Orthogonalité de droites et de plans. 155
I Orthogonalité de deux droites. 155
II Orthogonalité d'une droite et d'un plan. 156
III Vecteur normal à un plan. 156
IV Orthogonalité de deux plans. 158
V Projeté orthogonal d'un point sur un plan. 159
VI Distance d'un point à un plan. 159
VII Exercices. 159
VIII Corrections. 163

Théorie des probabilités. 169

11. Loi binomiale. 171

I Épreuve de Bernoulli. . . . 171
II Loi de Bernoulli. . . . 172
III Moments d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli (rappels). . . . 172
IV Schéma de Bernoulli. . . . 173
V Arbre pondéré et schéma de Bernoulli. . . . 173
VI Les issues d'un schéma de Bernoulli. . . . 174
VII Variable aléatoire suivant une loi binomiale. . . . 174
VIII Coefficients binomiaux. . . . 175
IX Calcul de probabilité pour une loi binomiale. . . . 176
X Calcul de probabilité avec la fonction de répartition avec la calculatrice. . . . 177
XI Moments d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale. . . . 178
XII Échantillonnage. . . . 180
XIII Avec des variables aléatoires auxiliaires. . . . 181
XIV Exercices. . . . 184
XV Exercices avec variation de la taille de l'échantillon. . . . 185
XVI Corrections. . . . 185

12. Variables aléatoires et moments. 193

I Notion de variable aléatoire finie. . . . 193
II Somme de variables aléatoires. . . . 195
III Indépendance de variables aléatoires. . . . 195
IV Espérance. . . . 196
V Variance et écart-type. . . . 198
VI Exercices. . . . 200
VII Corrections. . . . 201

13. Échantillon de taille n d'une variable aléatoire. 205

I Échantillon de taille n. . . . 205
II Application à la loi binomiale. . . . 206
III Exercices. . . . 207
IV Corrections. . . . 208

14. Concentration, loi des grands nombres. 211

I Inégalités de concentration. . . . 211
II L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev dans le cas de la moyenne d'un échantillon. 213
III Loi faible des grands nombres. . . . 214
IV Exercices. . . . 214
V Corrections. . . . 219

Algorithmique. 225

15. Listes Python. 227

I Listes. . . . 227
II Modifier une liste. . . . 227
III Générer une liste. . . . 228
IV Exercices. . . . 229

V Corrections. 230

Logique. 231

16. Raisonnement par récurrence. 233

I Logique : propositions, assertions. 233
II Le théorème du raisonnement par récurrence. 234
III Récurrence double. 238
IV Récurrence forte. 238
V Exercices. 238
VI Corrections. 240

Algèbre.

1. Dénombrement.

I Produit cartésien, p-uplets (ou p-listes).

Définition 1. Soient x et y deux éléments. On appelle *couple* "x, y" et on note (x,y) l'ensemble $\{x,\{x,y\}\}$.

Proposition 1. Soient x_1, y_1, x_2, y_2 des éléments. $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ si et seulement si $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$.

Définition 2. Soient E et F des ensembles. Nous appellerons *produit cartésien de* E et F l'ensemble que nous noterons $E \times F$ formé de tous les couples (x,y) où $x \in E$ et $y \in F$.

Remarques.

1. Si $E = F$ plutôt que d'écrire $E \times E$ nous écrirons E^2.
   De même $E \times E \times E = E^3$.
2. En itérant le procédé nous définirions, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les n-uplets (ou n-listes) : $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ où $x_1 \in E_1$, ..., $x_n \in E_n$. L'ensemble des n-uplets est encore appelé produit cartésien et est noté $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$.
3. Nous appellerons n-liste de E un élément de E^n.
4. Deux p-listes sont égales si elles sont constituées des mêmes éléments dans le même ordre.
5. Les éléments d'une p-liste ne sont pas forcément distincts.
6. Les coordonnées de vecteurs du plan sont des 2-listes de $\mathbb{R}$.

Exemples.

1. Les 2-listes de $E = \{a,b,c\}$ sont (a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c). (a,a,b,c,a) et (a,b,a,c,a) sont deux 5-listes de E distinctes.
2. $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels. Il peut être vu comme l'ensemble des coordonnées des points dans un espace affine muni d'un repère cartésien.
3. $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des coordonnées de l'espace affine euclidien muni d'un repère.
4. L'univers d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, dont le succès est noté S, est $\Omega = \{S,\overline{S}\}^n$ et les issues sont des n-uplets formés de S et de $\overline{S}$.

Proposition 2. Soit E une ensemble fini non vide de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de n-liste de E est $|E|^n$.

Démonstration. En raisonnant avec un arbre.

Exemples.

1. Le nombre de 2-listes de $E = \{a,b,c\}$ est $3^2 = 9$.
2. Les mots peuvent être vus comme des p-listes. Le nombre de mots de 10 lettres que l'on peut former avec les 26 lettres de l'alphabet est 26^{10}.

Proposition 3. Soient E et F des ensembles finis. $|E \times F| = |E| \times |F|$.

Remarques.

1. On parle également de principe multiplicatif ou de principe des bergers.

2. C'est un ensemble que nous avons déjà schématisé avec des arbres probabilistes lors de tirage successifs.

Exemples.

1. Chaque case d'une grille de bataille navale est codée par une couple formé d'une lettre entre A et F puis d'un nombre entre 1 et 8. Donc le nombre de case est 7×8.

Proposition 4. Soit E une ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Le nombre de parties (de sous-ensembles) de E est 2^n.

Démonstration. $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \{0;1\}^n \\ A & \mapsto & \chi_A \end{array} \right.$ est une bijection et $|\{0;1\}^n| = 2^n$.

II Arrangements.

Définition 3. Soient E un ensemble fini non vide, $p \in \mathbb{N}^*$. Nous appellerons *p-arrangement de E* (ou arrangement de p éléments de E), tout p-uplet d'éléments de E deux à deux distincts.

Exemples.

1. Les 2-arrangements de $E = \{a,b,c\}$ sont (a,b), (b,a), (a,c) (c,a), (b,c) et (c,b).
2. Si le mot « math » est un 4-arrangement de lettres de l'alphabet, « mathématique » n'en n'est pas un car il ya répétition de lettres.

Proposition 5. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, E un ensemble de cardinal n. Le nombre de p-arrangements de E est $A_n^p = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } p > n \\ n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) & \text{si } 0 < p < n \\ 1 & \text{si } p = 0 \end{array} \right.$

Démonstration.

1. Si $p > n$ nous ne pourrons trouver p éléments distincts dans E.
2. Si $0 < p < n$ il s'agit d'interpréter la situation comme un tirage sans remise de p boules dans une urne en contenant n.
3. Si $p = 0$ c'est une convention.

Remarques.

1. Autrement dit si $p \in [\![0,n]\!]$, $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Exemples.

1. Le nombre de 2-arrangements de $E = \{a,b,c\}$ est $A_3^2 = 3 \times (3-2+1) = 6$.
2. $A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$.

Définition 4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un ensemble de cardinal n. Nous appellerons *permutation de E* tout n-arrangement d'éléments de E.

Exemples.

1. L'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$ est $\mathfrak{S}_n$.
2. En français les permutations des lettres d'un mot sont appelés ses anagrammes.
3. Une permutation est une bijection de E sur E.
4. Il y a $n!$ permutations sur E de cardinal n.

III Combinaisons.

Définition 5. Nous appellerons combinaisons de p éléments de E (ou p-combinaison) toute partie de E de cardinal p.

Remarques.

1. Nous retrouvons l'idée des chemins comptant le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli peu importe dans quel ordre. Si E est l'ensemble des niveaux de l'arbre (donc au nombre de n), peu importe à quels niveaux il y a eu succès ce qui importe c'est le nombre (p) de succès.

Proposition 6. Le nombre de p-combinaisons de E se note $\binom{n}{p}$ et est appelé coefficient binomial p parmi n.

Si $p > n$ alors $\binom{n}{p} = 0$.

Si $0 \leqslant p \leqslant n$ alors $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démonstration. Si $p > n$ il n'existe pas d $\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!}$.

Exemples.

1. En particulier on retiendra $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$.

Exercice 1. Sans justification, calculez $\binom{1345}{0}$, $\binom{730}{729}$, $\binom{23}{22}$, $\binom{6}{2}$.

Proposition 7. Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in [\![0,n]\!]$. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ et $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

Remarques.

1. Triangle de Pascal.

Exercice 2. Sans justification indiquez les nombres égaux parmi : $\binom{8}{0}$, $\binom{8}{2}$, $\binom{8}{4}$, $\binom{8}{6}$, $\binom{8}{8}$.

Exercice 3. Démontrez que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Exercice 4. Démontrez $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

Exercice 5. Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\binom{n}{n-1} = n$.

b) $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)! = (n+1)n!$.

d) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n}$.

Proposition 8. Pour tous nombres complexes a et b et pour tout entier naturel n non nul $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Démonstration. Une démonstration par récurrence un peu difficile du fait du changement d'indice dans des sommes discrètes et utilisant la précédente proposition.

Exercice 6. Soit $(p,q) \in]0,1[^2$ tel que $p + q = 1$. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \prod_{k=0}^{n} \exp\left(\binom{n}{k} p^k q^{n-k}\right)$. Déterminez $\ln(P_n)$ puis déduisez-en P_n pour $n \in \mathbb{N}$.

IV Exercices.

Exercice 7. Une urne contient quatre boules blanches et trois boules noires On tire simultanément trois boules de l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages possibles ne comportant que des boules blanches ?
3. Combien y a-t-il de tirages unicolores ?
4. Combien y a-t-il de tirages comportant une boule blanche et deux boules noires ?

Exercice 8. On choisit au hasard simultanément quatre cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

2. Combien y a-t-il de tirages possibles comportant le roi de cœur ?
3. Combien y a-t-il de tirages comportant quatre cœurs ?
4. Combien y a-t-il de tirages ne comportant aucun as ?

Exercice 9. Le code d'une carte de crédit est formé de quatre chiffres distincts.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?
2. Combien y a-t-il de codes ne comportant que des chiffres pairs ?
3. Combien y a-t-il de codes commençant par le chiffre 2 ?

Exercice 10. Un numéro de téléphone est constitué de 10 chiffres dont le premier est 0 et les neuf autres quelconques.

1. Combien y a-t-il de numéros possibles ?
2. Combien y a-t-il de numéros possibles commençant par 06 ?
3. Calculez le nombre de numéros contenant
   (a) les dix chiffres,
   (b) exactement 3 fois le chiffre 6.

Exercice 11. Un code est formé d'une lettre suivie de trois chiffres.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?
2. Combien y a-t-il de codes commençant par la lettre A ?
3. Combien y a-t-il de codes commençant par A et contenant les chiffres 1, 2 et 3 ?

Exercice 12. Lors d'une course hippique on peut parier sur les cinq premiers chevaux à l'arrivée. On parle alors de quinté. 15 chevaux, numérotés de 1 à 15, sont au départ. Combien y a-t-il de quintés différents :

1. en tenant compte de l'ordre ?
2. sans tenir compte de l'ordre ?

Exercice 13. Une urne contient 100 jetons numérotés de 1 à 100. On tire simultanément deux jetons de l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possible ?
2. Quelle est la probabilité de tirer deux numéros pairs ?
3. Parmi les événements suivants, quel est le plus probable ?
   (a) A : « la somme des numéros est paire »,
   (b) B : « la somme des numéros est impaire ».

Exercice 14. Combien peut-on former de mots de 5 lettres

1. comportant des lettres différentes ?
2. commençant par une voyelle et finissant par une consonne ?
3. contenant exactement une voyelle ?

Exercice 15. Au « Swiss Loto », un joueur doit choisir 6 numéros parmi les 42 numéros de la première grille, puis un des 6 numéros « chance » qui composent la deuxième grille.

1. Combien de choix des 6 numéros sur la première grille sont possibles ?
2. Combien de grilles différentes (en incluant le choix du numéro « chance ») peut-on remplir ?
3. Un tirage a été effectué. Combien de grilles contiennent exactement trois numéros gagnants mais pas le numéro « chance ».
4. Calculez la probabilité qu'un joueur qui remplit 6 grilles avec numéro chance trouve parmi elles la grille gagnante.

Exercice 16. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : x \mapsto (1+x)^n$.

1. Calculez f' à partir de l'expression factorisée de f puis à partir de son expression développée.
2. Démontrez $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \times 2^{n-1}$.

Exercice 17. La fonction dérivée d'une fonction f est notée f'. La dérivée de la fonction dérivée, notée f'' ou $f^{(2)}$, est appelée la *dérivée seconde* ou *dérivée d'ordre* 2. Nous définirons plus généralement le *fonction dérivée d'ordre* n (n entier naturel) d'une fonction la fonction obtenue en dérivant n fois la fonction f et nous la noterons $f^{(n)}$.

Soient u et v des fonctions indéfiniment dérivables. Déterminez la dérivée d'ordre n de la fonction produit uv.

Exercice 18. Montrez : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall r \in [\![1,n]\!]$, $\binom{n}{r} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1}$.

Exercice 19. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{x}{k}\right)$.

1. Que valent $P_n(0)$, $P_n(-1)$ et $P_n(-n)$?
2. Démontrez que pour tout réel non nul x, on a $P_n(x) = \frac{x+n}{x} P_n(x-1)$.
3. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, écrire $P_n(p)$ comme coefficient du binôme.

Exercice 20. Soit n un entier naturel. Une urne contient n boules rouges et n boules vertes. On tire les boules de l'urne les unes après les autres jusqu'à ce que l'urne soit vide, en notant au fur et à mesure la couleur de la boule tirée : R pour rouge et V pour verte.

1. (a) Faire le lien entre le résultat obtenu et l'ensemble $E = \{R,V\}$.
   (b) Montrez que le nombre de ces $2n$-uplets est $\binom{2n}{n}$.
2. Considérons un jeu. On gagne 1 € à chaque tirage d'une boule de couleur différente de la boule précédemment tirée ; sinon on ne gagne rien. La partie est finie lorsque l'urne est vide.
   (a) Calculez la probabilité de gagner exactement 1 € lors d'une partie.
   (b) Calculer la probabilité de gagner 2 € lors d'une partie.
   (c) Soit $k \in [\![2,2n]\!]$. Calculez, en fonction de n, la probabilité de gagner au k-ième tirage. Cette probabilité dépend-elle du rang k ?

Exercice 21.

1. Un sac contient contient 5 boules indiscernables sur lesquelles sont écrites les lettres A, B, C, D et E.
   On tire une boule au hasard, on note la lettre, et on remet la boule dans l'urne. On répète trois fois cette action. On obtient ainsi un mot de trois lettres.
   À l'aides des coefficients binomiaux écrivez :
   (a) le nombre de mots que l'on peut obtenir ayant trois lettres différentes, sans tenir compte de l'ordre ;
   (b) le nombre de mots que l'on peut obtenir ayant deux lettres différentes et une lettre commune ;
   (c) le nombre de mots que l'on peut obtenir ayant trois lettres différentes.
2. Quatre amies se rendent dans un salon de thé où huit thés différents sont proposés. Combien de plateaux de quatre tasses de thés, différentes ou non, pourra leur amener le serveur ?

V Corrections.

Exercice 1. $\binom{1345}{0} = 1345$, $\binom{730}{729} = \frac{730!}{729!(730-729)!} = \frac{730!}{729!} = 730$, $\binom{23}{22} = 23$, $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{4!\times 2} = \frac{6\times 5}{2} = 15$.

Exercice 2. Sans justification indiquez les nombres égaux parmi : $\binom{8}{0} = \binom{8}{8}$, $\binom{8}{2} = \binom{8}{6}$, $\binom{8}{4}$.

Exercice 3. On fait la somme des parties de E avec 0 éléments, puis 1 élément, puis 2, ..., jusqu'à n éléments.

Exercice 4. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!n}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} \times \frac{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

Exercice 5.

1. $\binom{4+3}{3} = \frac{7\times6\times5}{3\times2} = 7 \times 5 = 35$.
2. $\binom{4}{3} = 4$.
3. $\binom{4}{3} + \binom{3}{3} = 5$.
4. $\binom{4}{1} \times \binom{3}{2} = 4 \times 3 = 12$.

Exercice 6.

a) Vraie. b) Vraie. c) Vraie. d) Fausse

Exercice 7. $\ln(P_n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n$ donc $P_n = \exp((p+q)^n)$.

Exercice 8.

1. $\binom{4+3}{3} = \frac{7\times6\times5}{3\times2} = 7 \times 5 = 35$.
2. $\binom{4}{3} = 4$.
3. $\binom{4}{3} + \binom{3}{3} = 5$.
4. $\binom{4}{1} \times \binom{3}{2} = 4 \times 3 = 12$.

Exercice 9.

1. $\binom{32}{4} = \frac{32\times31\times30\times29}{4\times3\times2}$.
2. $1 \times \binom{31}{4} = \frac{31\times30\times29\times28}{4\times3\times2}$.
3. $\binom{8}{4}$.
4. $\binom{28}{4}$.

Exercice 10.

1. 10^4.
2. 5^4.
3. 9^3.

Exercice 11.

1. 10^9.
2. 10^8.
3. (a) $A_9^9 = 9!$.
   (b) $A_9^3 \times \binom{9}{6}$.

Exercice 12.

1. 26×10^3.
2. 10^3.
3. $1 \times A_3^3 = 3!$.

Exercice 13.

1. $A_{15}^5 = \frac{15!}{(15-5)!} = 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11$.
2. $\binom{15}{5} = \frac{15\times14\times13\times12\times11}{5\times4\times3\times2}$.

Exercice 14.

1. $\binom{100}{2} = \frac{100\times99}{2}$.
2. $\frac{\binom{50}{2}}{\binom{100}{2}}$.
3. A est réalisé si les deux numéros sont de même parité et B s'ils sont de parité différente donc équiprobables.

Exercice 15.

1. $\binom{26}{5}$.
2. $6 \times 26^3 \times 20$.
3. $5 \times 6 \times 20^4$.

Exercice 16.

1. $\binom{42}{6}$.
2. $\binom{42}{6} \times 6$.
3. $\binom{6}{3} \times \binom{42-6}{3} \times 5$.
4. $\frac{6}{\binom{42}{6} \times 6}$.

Exercice 17.

1. $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$ et $f'(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1}$.
2. En calculant $f'(2)$ avec les deux formules précédentes.

Exercice 18. $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$.

Exercice 19.

1. $P_n(0) = 1$, $P_n(-1) = 0$ et $P_n(-n) = 0$.
2. $P_n(x) = \frac{1}{n!}(1+x)(2+x)\dots(n+x)$ donc $P_n(x-1) = \frac{1}{n!}x(1+x)\dots(n-1+x)$ puis $\frac{x+n}{x}P_n(x-1) = \frac{1}{n!}(1+x)\dots(n-1+x)(n+x) = P_n(x)$.
3. $P_n(p) = \binom{n+p}{p}$ et on le montre par récurrence sur p en utilisant la question 1 pour l'initialisation et la 2 pour l'hérédité.

Exercice 20.

1. (a) Le résultat obtenu est un $2n$-uplet d'éléments de E donc un élément de E^{2n} mais qui comporte exactement n R et n V.
   (b) On choisit les emplacements des R par exemple. En numérotant les positions dans le $2n$-uplets nous voyons qu'il s'agit de choisir n éléments distincts et dans n'importe quel ordre dans $[\![1,2n]\!]$. Les n autres emplacements sont occupés par de V. Il y a donc bien $\binom{2n}{n}$ possibilités.
2. (a) Pour gagner 1 euros il faut qu'il y ait d'abord toutes les boules d'une couleur puis toutes les boules de l'autre donc 2 possibilités. En admettant l'équiprobabilité, la probabilité est de $\frac{2}{\binom{2n}{n}}$.
   (b) Il faut des $2n$-uplets de la forme $RV\dots VR\dots R$ ce qui fait $2(n-1)$. La probabilité est donc : $\frac{2(n-1)}{\binom{2n}{n}}$.
   (c) Il a $\binom{2n-2}{n-1}$ possibilités de $2n$-liste comportant R en k-ième position et V en position suivante. Il y en autant avec VR en k-ième position. Il y a donc $2\binom{2n-2}{n-1}$ $2n$-liste gagnant au k-ième tirage.

Exercice 21.

1. (a) $\binom{5}{3}$.
   (b) $5 \times \binom{4}{2} \times A_5^2$.
   (c) A_5^3.
2. A_8^4.

Analyse réelle.

2. Dérivation.

I Nombre dérivé.

Définition 6. Soient I un intervalle ouvert, $a \in I$, f une application définie sur I. On dit que f est *dérivable en a* si et seulement si $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a. Si c'est le cas, alors cette limité est notée $f'(a)$ et appelée *nombre dérivée de f en a*.

Exemples.

1. La fonction constante égale à 2 est dérivable en 3 puisque $\frac{2-2}{x-3} = 0 \underset{x\to 3}{\longrightarrow} 0$ et son nombre dérivé en 3 est 0.
2. La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0. En effet $\frac{|x|-|0|}{x-0} = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$.
   Ainsi : $\frac{|x|-|0|}{x-0} \underset{\substack{x\to 0\\ x<0}}{\longrightarrow} -1$ et $\frac{|x|-|0|}{x-0} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} 1$ donc, par unicité de la limite, $\frac{|x|-|0|}{x-0}$ n'a pas une limite finie en 0.
3. La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 mais elle ne correspond pas à notre définition car 0 est la borne de son domaine de définition et n'appartient pas à un intervalle ouvert.

Remarques.

1. La quantité $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est appelée *taux d'accroissement de f entre a et x*. Il s'interprète graphiquement comme le coefficient directeur de la droite, appelée sécante à $\mathscr{C}_f$, passant par les points de coordonnées $(a,f(a))$ et $(x,f(x))$.

Proposition 9. Soient I un intervalle ouvert, $a \in I$, f une application définie sur I. f est dérivable en a si et seulement si il existe un nombre m et une fonction ε définie sur I tels que : $\begin{cases} \forall x \in I,\ f(x) = f(a) + m(x-a) + (x-a)\varepsilon(x) \\ \varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$.

Et si f est dérivable en a alors $m = f'(a)$.

Démonstration. Démontrons le résultat par implication directe puis réciproque.

* Supposons que f est dérivable en a et démontrons l'existence de m et ε.
  Notons $m = f'(a)$ qui existe puisque f est dérivable en a. Notons $\varepsilon(x) = \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a}$ pour tout $x \in I \setminus \{a\}$ et $\varepsilon(a) = 0$. Clairement $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.
* Réciproquement, supposons l'existence de m et ε et démontrons que f est dérivable en a. $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = m + \varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} m$ donc f est dérivable en a et $f'(a) = m$.

Remarques.

1. On remarque l'équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.
2. L'écriture $f(x) = f(a)+m(x-a)+(x-a)\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ est appelée *développement limité à l'ordre 1 en a de f*.

3. Cette façon de voir le nombre dérivée (caractérisation) simplifie les démonstrations théoriques que nous ferons dans la suite.

Proposition 10. Soient I un intervalle ouvert, $a \in I$, f une application définie sur I. Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Démonstration. f est dérivable en a si et seulement si il existe un réel d et une fonction ε telle que $f(x) = f(a) + d(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$ et $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. Donc si f est dérivable $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Remarques.

1. La réciproque est fausse. C'est pour cela que l'on parle de condition suffisante : la continuité n'impose pas de façon nécessaire la dérivabilité de la fonction. Le contre exemple usuel est celui de la fonction valeur absolue en 0. Il y a le même phénomène avec la fonction racine cubique en 0.

II Tangente.

Il s'agit d'une interprétation géométrique du nombre dérivé comme coefficient directeur d'une tangente à la courbe représentative de la fonction.

Définition 7. Soient I un intervalle ouvert, $a \in I$, f une application définie sur I, $\mathscr{R}$ un repère du plan. Si f est dérivable en a alors on appelle *ctangente à $\mathscr{C}_f$ dans $\mathscr{R}$ au point d'abscisse a* la droite dont une équation dans $\mathscr{R}$ est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

III Fonction dérivée.

Définition 8. Soient I un intervalle ouvert et f une application définie sur I. Si f est dérivable en tout $a \in I$ on dit que f est dérivable sur I et on note f' la fonction définie sur I par $f' : a \mapsto f'(a)$. f' est appelée *dérivée de f*.

Remarques.

1. Si la fonction dérivée est elle même dérivable on peut la dériver est obtenir la dérivée seconde qu'on note f''. On peut réitérer est obtenir des dérivées successives. Pour $n \geqslant 3$ un entier on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f.

IV Fonctions puissances.

Proposition 11. Soient $m \in \mathbb{R}$ et m des réels. $x \mapsto mx + p$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction constante égale à m.

Démonstration. $f(x) - f(a) = m(x-a) = m(x-a) + (x-a) \times 0$.

Remarques.

1. En particulier les fonctions constantes et la fonction identité sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et leurs dérivées sont respectivement la fonction nulle et la fonction constante égale à 1.

Proposition 12. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. $f : x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = nx^{n-1}$.

Démonstration. Soient n un entier supérieur ou égale à 2 et $a \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
x^n - a^n &= ((x-a)+a)^n - a^n \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} (x-a)^{n-k} a^k\right) - a^n \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-a)^k a^{n-k}\right) - a^n \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (x-a)^k a^{n-k} \\
&= \binom{n}{1}(x-a) + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (x-a)^k a^{n-k} \\
&= \binom{n}{1}(x-a)a^{n-1} + (x-a)\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (x-a)^{k-1} a^{n-k}
\end{aligned}$$

Or $k \geqslant 2$ donc $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}(x-a)^{k-1}a^{n-k} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$. Et par conséquent f est dérivable en a et $f'(a) = \binom{n}{1}(x-a)a^{n-1} = na^{n-1}$.

V Linéarité de la dérivation.

Proposition 13. Soit I un intervalle ouvert, $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$, f et g des fonctions définies et dérivables en a. La fonction $\lambda f + g$ définies sur I par $(\lambda f + g) : x \mapsto \lambda f(x) + g(x)$ est dérivable en a et $(\lambda f + g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a)$.

Démonstration. f et g étant dérivables en a : $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon_1(x)$ et $g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon_2(x)$. En multipliant par λ puis en sommant membre à membre : $\lambda f(x) + g(x) = \lambda f(a) + g(a) + \left(\lambda f'(a) + g'(a)\right)(x-a) + (x-a)\left(\lambda\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)\right)$.Or $\lambda\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ donc $\lambda f + g$ est dérivable en a et $(\lambda f + g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a)$.

Remarques.

1. Le résultat est ponctuel, en a, mais il se généralise sans problème à l'intervalle I.
2. On dit que la dérivation est linéaire, elle respecte les combinaisons linéaires. Par conséquent l'ensemble des fonctions dérivables sur I est un espace vectoriel.
3. De la dérivabilité des fonctions puissances et de la linéarité de la dérivation nous déduisons le résultat important au lycée : toute fonction polynomiale, $P : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

VI Dérivation d'un produit.

Proposition 14. Soit I un intervalle ouvert, $a \in I$, f et g des fonctions définies et dérivables en a. La fonction produit fg, définie par $(fg) : x \mapsto f(x) \times g(x)$, est dérivable en a et $(fg)'(a) = (f'g)(a) + (fg')(a)$.

Démonstration. f et g étant dérivables en a : $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon_1(x)$ et $g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon_2(x)$. En multipliant membre à membre : $f(x)g(x) = \left(f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon_1(x)\right)\left(g(a) + g'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon_2(x)\right) = f(a)g(a) + f(a)g'(a)(x-$

$a) + f(a)(x-a)\varepsilon_2(x) + f'(a)(x-a)g(a) + f'(a)(x-a)g'(a)(x-a) + f'(a)(x-a)(x-a)\varepsilon_2(x) + (x-a)\varepsilon_1(x)g(a) + (x-a)\varepsilon_1 g'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon_1(x-a)\varepsilon_2(x) = f(a)g(a) + \left[f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\right](x-a) + (x-a)\left[f(a)\varepsilon_2(x) + f'(a)g'(a)(x-a) + f'(a)(x-a)\varepsilon_2(x) + \varepsilon_1(x)g\right.$
Or $f(a)\varepsilon_2(x) + f'(a)g'(a)(x-a) + f'(a)(x-a)\varepsilon_2(x) + \varepsilon_1(x)g(a) + (x-a)\varepsilon_1 g'(a) + (x-a)\varepsilon_1\varepsilon_2(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ donc fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

VII Composition et dérivation.

Proposition 15. Soient I et J des intervalles ouverts, $f : I \to J$ une fonction définie sur I et $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur J. Si f est dérivable sur I et si g est dérivable sur J alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = g' \circ f \times f'$.

Démonstration. Soit $a \in I$. Par construction $f(a) \in J$. f est dérivable en a si et seulement si il existe une fonction ε_1 définie au voisinage de a telle que : $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon_1(x)$ et $\varepsilon_1(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.

De même g est dérivable en $f(a)$ si et seulement si il existe une fonction ε_2 définie au voisinage de $f(a)$ telle que : $g(f(x)) = g(f(a)) + g'(f(a))(f(x) - f(a)) + (f(x) - f(a))\varepsilon_2(x)$ et $\varepsilon_2(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g \circ f(a) + g' \circ f(a)(f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon_1(x)) + (f(x) - f(a))\varepsilon_2(x) \\ &= g \circ f(a) + g' \circ f(a) f'(a)(x-a) + g' \circ f(a)(x-a)\varepsilon_1(x) \\ &\quad + (f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon_1(x))\varepsilon_2(x) \\ &= g \circ f(a) + g' \circ f(a) f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon_3(x) \end{aligned}$$

où $\varepsilon_3(x) = g' \circ f(a)\varepsilon_1(x) + (f'(a) + \varepsilon_1(x))\varepsilon_2(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.

$g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = g' \circ f \times f'$.

Remarques.

1. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et u est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, alors u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu^{n-1}u'$.
2. Confer la leçon sur la composition.
3. Au XVIIIe siècle, Newton notait $\dot{y}$ et $\ddot{y}$ les dérivées premières et secondes de la fonction $t \mapsto y(t)$. De son côté Leibniz notait $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ la dérivée de cette même fonction : c'est ce qu'on appelle la notation différentielle. Cette notation reste très utilisée en physique, ainsi $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$ désigne la dérivée seconde de f. Avec la notation différentielle, la formule donnant la dérivée des fonctions composées s'écrit : $\frac{\mathrm{d}(f\circ u)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} \times \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

Il faut, pour le calcul intégral, apprendre à reconnaître des dérivées de fonctions composées. C'est pourquoi il faut apprendre par cœur les ci-dessous déclinaisons de la formule générale ($n \in \mathbb{N}^*$).

a) $f = \mathrm{e}^u$, $f' = \mathrm{e}^u \times u'$.
b) $f = \ln(u)$, $f' = \frac{u'}{u}$.
c) $f = u^n$, $f' = u^{n-1} \times u'$.
d) $f = \frac{1}{u^n}$, $f' = \frac{-nu'}{u^{n+1}}$.
e) $f = \sin(u)$, $f' = \cos(u) \times u'$.
f) $f = \cos(u)$, $f' = -\sin(u) \times u'$.

VIII Dérivation de la fonction inverse.

Proposition 16. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable en a et $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.
Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ par exemple. Le taux d'accroissement de f entre $x \in \mathbb{R}_-^*$ et a est : $\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a} = -\frac{1}{ax} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$. Ainsi f est dérivable en a et $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.
Remarques.

1. Si u est une application dérivable et ne s'annulant pas sur I un intervalle ouvert alors $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.

IX Dérivation d'un quotient.

Proposition 17. Soit I un intervalle ouvert, f et g des fonctions définies et dérivables sur I, g ne s'annulant pas sur I. La fonction quotient $\frac{f}{g}$, définie par $\left(\frac{f}{g}\right) : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$, est dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$.
Démonstration. On utilise les résultats précédents : dérivation d'un produit et dérivation de l'inverse et composition.

X D'autres fonctions puissances.

Proposition 18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $f : x \mapsto x^{-n}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$.
Démonstration. Composition d'une fonction puissance par une fonction inverse.
Remarques.

1. Avec la notation $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ on retrouve la même formule que pour les fonctions puissances.

XI Dérivation de la fonction racine carrée.

Proposition 19. $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \frac{x-a}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})(x-a)} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \frac{1}{2\sqrt{a}}$.
Remarques.

1. La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 mais nous ne l'avons pas démontré et pour cause : nous n'avons pas donné de définition de la dérivabilité aux bornes du domaine de définition.
2. Par le biais de la fonction exponentielle il est possible de définir des fonctions puissances d'un nombre réel quelconque sur $\mathbb{R}_+^*$. Dans ce cadre : $\sqrt{x} = x^{1/2}$ et on obtient bien une généralisation de la dérivation des fonctions puissances.

XII Dérivation et variation.

Proposition 20. Soient I un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur I.

(i) $f' \geqslant 0$ si et seulement si f est croissante.

(ii) $f' \leqslant 0$ si et seulement si f est décroissante.
(iii) $f' = 0$ si et seulement si f est constante.
(iv) Si $f' > 0$, sauf éventuellement en un nombre fini de points pour lesquels $f'(x) = 0$, alors f est strictement croissante.
(v) Si $f' < 0$, sauf éventuellement en un nombre fini de points pour lesquels $f'(x) = 0$, alors f est strictement décroissante.

Démonstration. L'idée (très approximative) de la démonstration est la suivante pour le cas $f' \geqslant 0$. Pour h suffisamment proche de 0 le taux d'accroissement est positif : $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geqslant 0$. Donc pour $h > 0$, $f(a+h) - f(a) \geqslant 0$. Ou encore : $f(a) \leqslant f(a+h)$. f conserve l'ordre entre a et $a+h$. Autrement dit f est croissante.

La réciproque est du même tabac.

Remarques.

1. Par convention les tableaux de variations indiquent la stricte monotonie. Pour les construire nous utiliserons donc les implications (iv) et (v) correspondantes.
2. Le (ii) offre une caractérisation des fonctions constantes. Autrement dit c'est un moyen des démontrer qu'une fonction est constante. Nous utiliserons ce résultat dans des démonstrations de la leçon sur la fonction exponentielle.
3. Ce résultat n'est valable que sur un intervalle. En effet, il n'est qu'à considérer la fonction inverse pour voir que le théorème ne fonctionne pas si on est pas sur un intervalle.

Exemples.

1. Soit $f : x \mapsto -x^2 + 4x - 7$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
   Étudions les variations de f sur $]0; +\infty[$.
   La démarche pour étudier les variations d'une fonction se fera désormais ainsi :
   (a) calcul de la fonction dérivée,
   (b) étude du signe de la fonction dérivée,
   (c) construction d'un tableau indiquant le signe de la fonction dérivée puis les variations de la fonction.

   (a) Déterminons la dérivée de f.
   f est une fonction polynomiale donc est dérivable sur $]0; +\infty[$ et quelque soit $x \in]0; +\infty[$,
   $$f'(x) = -2x + 4$$
   (b) Étudions le signe de f'.
   f' est donc une fonction affine. Elle s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{4}{-2} = 2$. Comme son coefficient directeur $a = -2 < 0$, elle et strictement positive sur $]0; 2[$ et strictement négative sur $]2; +\infty[$.
   (c) Nous en déduisons

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖	↗	-3	↘	

2. Soit $g : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 13$ définie sur $\mathbb{R}$.
Étudions les variations de g sur $\mathbb{R}$.
En devoir surveillé une telle question, qui nécessite de nombreuses étapes, sera coupée en plusieurs sus questions : calculez la fonction dérivée, étudiez le signe de la fonction dérivée, dressez le tableau de variation de la fonction.

(a) Déterminons la dérivée de g.
g est une fonction polynomiale donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, quelque soit x réel,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{3} \times 3x^2 - \frac{3}{2} \times 2x + 2 + 0 \\ &= x^2 - 3x + 2 \end{aligned}$$

(b) Étudions le signe de g'.
g' est une fonction polynomiale de degré 2 avec : $a = 1$, $b = -3$ et $c = 2$.
Recherchons les racines de f'.
$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times (1) \times (2) = 1$.
$\Delta > 0$ donc g' admet deux racines distinctes.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times (1)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times (1)} \\ &= 2 \end{aligned}$$

g' est donc du signe de $a = 1$ sauf entre les racines 1 et 2.

(c) Nous en déduisons

x	0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	↗	$-\frac{73}{6}$	↘	$-\frac{37}{3}$	↗	

3. Soit $h : x \mapsto -4\sqrt{x}$ une fonction définie sur $]0; +\infty[$.
Étudions les variations de h sur $]0; +\infty[$.

(a) Déterminons f'.
h est le produit d'une constante et de la fonction racine carrée donc h est dérivable sur $]0; +\infty[$ et, quelque soit $x \in]0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

(b) Étudions le signe de h'.
Comme $x \neq 0$, $\sqrt{x}$ est strictement positif. Donc h' est strictement positive sur $]0; +\infty[$.

(c) Nous en déduisons

$$\boxed{h \text{ est strictement croissante sur }]0;+\infty[.}$$

4. Soit $h : x \mapsto x^3$.

XIII Étude d'une fonction, allure d'une courbe.

Étudier une fonction c'est, par des procédés analytiques, trouver des informations sur l'allure de la courbe représentative. On peut considérer que l'aboutissement pour un élève est d'être capable de donner une allure précise de la courbe représentative sans faire l'usage de la calculatrice.

L'étude d'une fonction inclus, en toute rigueur et sans exhaustivité :

— recherche du domaine de définition (choix de l'axe des abscisses),
— étude de la parité et de la périodicité (réduire l'axe des abscisses),
— limites aux bornes du domaine de définition (asymptotes qui correspondent approximativement à l'allure de la courbe),
— étude de la dérivabilité (risque de piquants ou courbe arrondie),
— calcul de la fonction dérivée et étude du signe de la fonction dérivée (tangentes horizontales qui correspondent approximativement à l'allure de la courbe),
— variation de la fonction (choix de l'axe des ordonnées, courbe qui monte ou qui descend, points correspondant à des extrema),
— calcul d'images remarquables ou simples (points de la courbe),
— calcul de la dérivée seconde et étude de son signe (convexité de la courbe),
— recherche de zéros de la fonction.

L'énoncé d'un exercice peut proposer d'autres choses qu'on attend pas a priori de l'élève : position relative de deux courbes (notamment asymptotes), tangente spécifique ...

XIV Exercices.

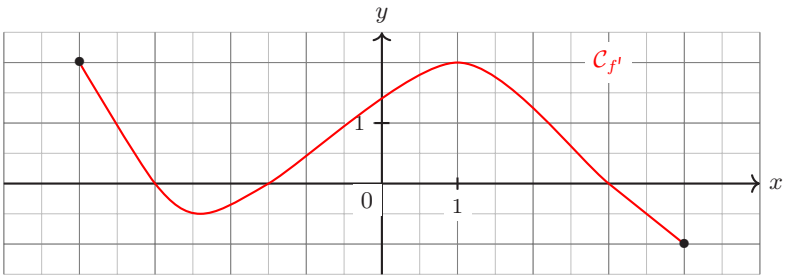
Exercice 22. Pour la fonction f dont l'expression algébrique est proposée, donnez l'allure de sa courbe représentative.

a) x.
b) x^2.
c) x^3.
d) $\sqrt{x}$.
e) $\frac{1}{x}$.
f) e^x.
g) $2x+3$.
h) $-4x+1$.
i) $3x+6$.
j) $2x^2-4x+5$.
k) $-3x^2-12x-14$.
l) $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+1$.
m) $-\frac{2}{3}x^3+13x^2+28x-17$.

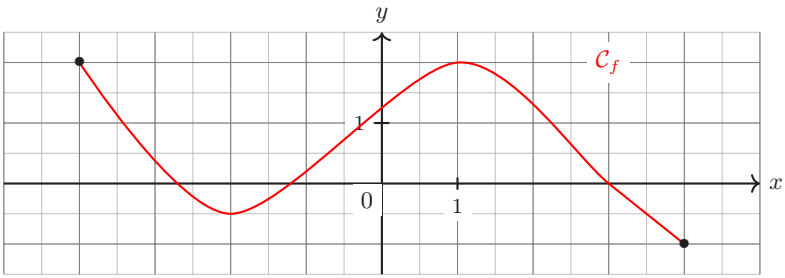
Exercice 23. Pour la fonction f dont l'expression algébrique est proposée, procédez à son étude puis donnez l'allure de sa courbe représentative.

a) $f : x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^x$.
b) $f : x \mapsto (x^2+2x+1)\mathrm{e}^x$.
c) $f : x \mapsto (-3x+2)\sqrt{x}$.
d) $f : x \mapsto (x^2+x+1)\sqrt{x}$.
e) $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$.
f) $f : x \mapsto \frac{-2x+1}{3x+6}$.
g) $f : x \mapsto \frac{x^2-2}{x^2+x+1}$.
h) $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x+1}$.
i) $f : x \mapsto \frac{-x+3}{x^7}$.
j) $f : x \mapsto \sqrt{3x+6}$.
k) $f : x \mapsto (2x+1)^7$.
l) $f : x \mapsto \frac{3}{(-2x+1)^3}$.
m) $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-2x+7}$.
n) $f : x \mapsto x^2\mathrm{e}^{3x+6}$.

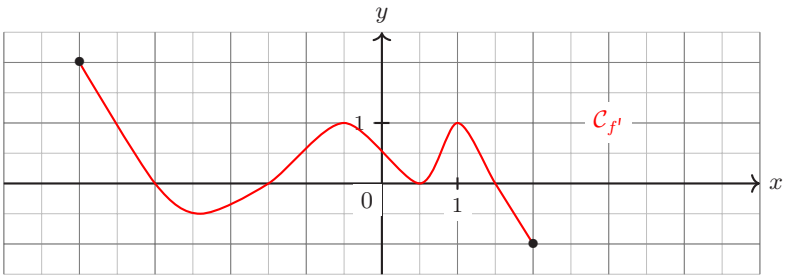
Exercice 24. Donnez, par lecture graphique, le tableau de variation de la fonction f dont la fonction dérivée f' est représentée ci-dessous.



Exercice 25. Donnez, par lecture graphique, le tableau de signe de la fonction f' dérivée de la fonction f qui est représentée ci-dessous.



Exercice 26. La dérivée f' d'une fonction f est représentée ci-contre. Par lecture graphique précisez les extrema locaux de f et pour quelles valeurs de x ils sont atteints.



Exercice 27. Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 5\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-2x} + x - 3$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x - 3$ dans un repère orthonormal. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x - 3)$.

1. Position relative.
   (a) Justifiez que pour tout réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$, $g(x) > 0$.
   (b) $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$ ont-elles un point commun ?
2. On note M le point d'abscisse x de $\mathscr{C}_f$, N le point d'abscisse x de la droite $\mathscr{D}$ et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN.
   (a) Justifier que, pour tout x de l'intervalle $[0;+\infty[$, la distance MN est égale à $g(x)$.

(b) On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0;+\infty[$. Pour tout x de l'intervalle $[0;+\infty[$, calculer $g'(x)$.

(c) *Nécessite* ln Montrez que la fonction g possède un maximum sur l'intervalle $[0;+\infty[$ que l'on déterminera. En donner une interprétation graphique.

Exercice 28. Les fonctions du baccalauréat.

a) $(x^2+3x+2)\mathrm{e}^x$.
b) $\mathrm{e}^x\sin(x)$.
c) $x\mathrm{e}^{-x}+2x+1$.
d) $\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.
e) $(60x+40)\mathrm{e}^{-0,5x}$.
f) $4\ln(x+1)-\frac{x^2}{25}$.
g) $-0{,}05x^2+1{,}1x$.
h) $x\left(2(\ln(x))^2-3\ln(x)+2\right)$.
i) $(12+x)\mathrm{e}^{-0,6x}$.
j) $x^n\mathrm{e}^{-x}$.
k) $x\ln(x-2)$.
l) $x\ln(x^2)-\frac{1}{x}$.
m) $2x-x^2$.

Exercice 29. Les fonctions du baccalauréat.

a) $\frac{0{,}96x}{0{,}93x+0{,}03}$.
b) $2x\mathrm{e}^{-x}$.
c) $\frac{\mathrm{e}^x}{x-1}$.
d) $10x\mathrm{e}^{-0,01x}+20$.
e) $(4x-2)\mathrm{e}^{-x+1}$.
f) $x^2-x\ln(x)$.
g) $x-\ln(x)$.
h) $x-2+\frac{1}{2}\ln(x)$.
i) $x-\ln(x^2+1)$.
j) $x^2+2x-1+\ln(x+2)$.
k) $\frac{4}{5-x}$.
l) $x-\ln\left(\frac{x}{4}\right)$.
m) e^x+x.
n) $(1-x^2)\mathrm{e}^x$.
o) $8x^2(2-3\ln(x))-3$.
p) $\frac{6}{1+5\mathrm{e}^{-x}}$.
q) $(20x+8)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.
r) $(x^2-4)\mathrm{e}^{-x}$.
s)

Exercice 30. *Bac série mathématiques élémentaires et mathématiques techniques 1968. Antilles* On considère l'application f de l'ensemble des réels dans l'ensemble des réels définie par $f : x \mapsto y = \frac{x^2+9x+15}{x^2+4x+5}$.

1. Étudiez les variations de cette fonction.
2. Représentez graphiquement les variations de cette fonction dans un repère orthonormé.

Exercice 31. Soit f la fonction définie, pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, par $f(x)=\cos(x)-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4!}$.

1. Définir les fonctions dérivées successives f', f'', $f^{(3)}$, $f^{(4)}$.
2. Dressez le tableau de variation de $f^{(3)}$, f'', f', f.
3. Déduisez-en que, pour tout $x \in]0;1]$, $1-\frac{x^2}{2}<\cos(x)<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$.

Exercice 32. Calculez les dérivées première, seconde, n-ième des fonctions suivantes : f_n : $x \mapsto 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$, $g_n : x \mapsto 1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$; $h_n : x \mapsto x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Exercice 33. Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrez que la fonction fg est n fois dérivable sur I et que $(fg)^{(n)}=fg^{(n)}+\binom{n}{1}f^{(1)}g^{(n-1)}+\cdots+\binom{n}{n-1}f^{(n-1)}g^{(1)}+f^{(n)}g$. On pourra établir cette formule par récurrence.
2. Calculez de deux façons la dérivée n-ième de $x \mapsto x^{2n}$. Notamment remarquez que $x^{2n}=x^nx^n$. Déduisez-en $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

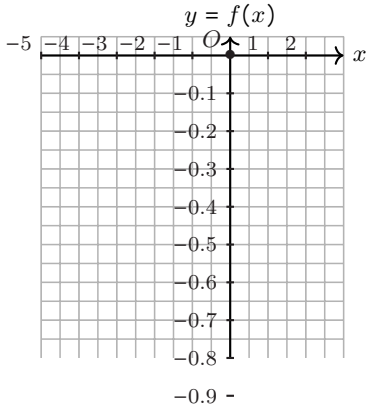
Exercice 34. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrez que si f est paire alors f' est impaire.
2. Montrez que si f est impaire alors f' est paire.

3. Montrez que si f est périodique de période T alors T est aussi une période de f'.

Exercice 35. L'objet de cet exercice est l'étude de la fonction f donnée par $f(x) = \dfrac{-1}{(x^2+3x-4)^2}$ et dont la courbe représentative dans un repère orthogonal est notée $\mathscr{C}_f$. Les questions sont là pour vous guider dans cette étude.

1. (a) Déterminez les racines du trinôme x^2+3x-4.
   (b) Donnez le domaine de définition, $\mathscr{D}_f$, de f.
2. f est-elle paire ? impaire ?
3. Calculez l'image de $\frac{1}{2}$ par f.
4. Déterminez le signe de f et donnez-en une interprétation graphique.
5. Dans cette question on souhaite étudier la variation de f.
   (a) Démontrez que $f'(x) = \dfrac{4x+6}{(x^2+3x-4)^3}$ quel que soit $x \in \mathscr{D}_f$.
   (b) Résolvez l'inéquation $4x+6>0$.
   (c) Étudiez le signe de x^2+3x-4 sur $\mathbb{R}$.
   (d) En remarquant que $(x^2+3x-4)^3$ est du même signe que x^2+3x-4, déduisez des questions précédentes le signe de f' puis la variation de f. *Vous pourrez utiliser le fait que* $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -0{,}0256$.
6. Déterminez l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
7. Donner l'allure de $\mathscr{C}_f$ sur $[-2;2]$ dans le repère ci-dessous en indiquant les informations obtenues dans les questions précédentes. *Vous pourrez utiliser les approximations suivantes :* $-\frac{16}{81} \approx -0{,}2$; $-\frac{1}{16} \approx -0{,}06$; $-\frac{3}{32} \approx -0{,}1$.



8. Démontrez que $\mathscr{C}_f$ présente une symétrie axiale d'axe d'équation $x = \frac{3}{2}$.

XV Corrections.

Exercice 22.

a) Fonction de référence. $f' : x \mapsto 1$.
b) Fonction de référence. $f' : x \mapsto 2x$.
c) Fonction de référence. $f' : x \mapsto 3x^2$.
d) Fonction de référence. $f' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
e) Fonction de référence. $f' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.
f) Fonction de référence. $f' : x \mapsto \mathrm{e}^x$.

g) Fonction affine. $f' : x \mapsto 2$.

h) Fonction affine. $f' : x \mapsto -4$.

i) Fonction affine. $f' : x \mapsto 3$.

j) Fonction polynomiale de degré deux. Possibilité d'étude des variations avec la forme canonique du trinôme.

Étudions la fonction f.

* Calculons la dérivée de f.
  f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 4x - 4.$$

* Étude du signe de f'.
  f' est affine de coefficient directeur $4 > 0$ donc strictement croissante. De plus $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
* Nous en déduisons

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	3	$\nearrow$	

* Pour le tracer faire apparaître le point de coordonnées $(1;3)$ et la tangente horizontale en ce point. Mais aussi le point d'intersection avec l'axe des ordonnées de coordonnées $(0;5)$.

k) $f' : x \mapsto -6x - 12$.

l) Étudions la fonction f.

* Calculons la dérivée de f. f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = x^2 + x - 2.$$

* Étude du signe de f'. f' est polynomiale de degré deux et son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$.
  $\Delta > 0$ donc f'admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2 \times 1} = -2,$$

  et

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2 \times 1} = 1.$$

  De plus le coefficient dominant de f' est $a = 1 > 0$.
* Nous en déduisons (le trinôme es du signe de son coefficient dominant sauf entre les racines) :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$\frac{13}{3}$	$\searrow$	$-\frac{1}{6}$	$\nearrow$	

* Pour le tracer faire apparaître les points de coordonnées $\left(-2, \frac{13}{3}\right)$ et $\left(1, -\frac{1}{6}\right)$ et la tangente horizontale en ces points. Mais aussi le point d'intersection avec l'axe des ordonnées de coordonnées $(0; 1)$.

m) $f' : x \mapsto -x^2 + 26x + 28$.

Exercice 23.

a) $f' : x \mapsto \mathrm{e}^x + (x+1)\mathrm{e}^x$. $f'(x) = (x+2)\mathrm{e}^x$.
b) $f' : x \mapsto (2x+2)\mathrm{e}^x + (x^2 + 2X + 1)\mathrm{e}^x$. $f'(x) = (x^2 + 4x + 3)\mathrm{e}^x$.
c) $f' : x \mapsto -3\sqrt{x} + \frac{-3x+2}{2\sqrt{x}}$. $f'(x) = \frac{-9x+2}{2\sqrt{x}}$.
d) $f' : x \mapsto (2x+1)\sqrt{x} + \frac{x^2+x+1}{2\sqrt{x}}$. $f'(x) = \frac{5x^2+3x+1}{2\sqrt{x}}$.
e) $f' : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x(x^2+1)-2x\mathrm{e}^x}{(x^2+1)^2}$. $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$.
f) $f' : x \mapsto \frac{-2(3x+6)-3(-2x+1)}{(3x+6)^2}$. $f'(x) = -\frac{15}{(3x+6)^2}$.
g) $f' : x \mapsto \frac{2x(x^2+x+1)-(x^2-2)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$. $f'(x) = \frac{2x^3+2x^2+2x-2x^3-x^2+4x+2}{(x^2+x+1)^2} = \frac{x^2+6x+2}{(x^2+x+1)^2}$.
h) $f' : x \mapsto \frac{\frac{x+1}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{(x+1)^2}$. $f'(x) = \frac{-x+1}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$.
i) $f' : x \mapsto \frac{-x^7-(-x+3)7x^6}{(x^7)^2}$. $f'(x) = \frac{6x^7-21x^6}{(x^7)^2} = \frac{x^6(6x-21)}{(x^7)^2}$.
j) $f' : x \mapsto \frac{3}{2\sqrt{3x+6}}$.
k) $f' : x \mapsto 2 \times 7(2x+1)^6$.
l) $f' : x \mapsto \frac{3\times(-3)\times(-2)}{(-2x+1)^4}$.
m) $f' : x \mapsto -2\mathrm{e}^{-2x+7}$.
n) $f' : x \mapsto 2x\mathrm{e}^{3x+6} + x^2 3\mathrm{e}^{3x+6}$. $f'(x) = x\mathrm{e}^{3x+6}(3x-2)$.

Exercice 24. C'est la fonction dérivée, f', qui est représentée. À partir de son signe nous pourrons retrouver les variations de f d'après le théorème. Pour se représenter les choses et justifier notre

réponse, nous pouvons construire un tableau indiquant le signe de la dérivée et la variation de la fonction.

Exercice 25. C'est la fonction f qui est représentée. À partir de ses variations nous pourrons retrouver le signe de sa fonction dérivée f' d'après le théorème.

Exercice 26. Il faut rechercher où la fonction dérivée s'annule en changent de signe. -3 correspond à un maximum local, $-1{,}5$ la fonction admet un minimum local, $1{,}5$ la fonction admet un maximum local.

Exercice 27.

1. (a) $g(x) = 5\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-2x}$. $g(x) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x > \frac{3}{5}$. Or exp étant strictement croissante et $\mathrm{e}^0 = 1$ donc $\mathrm{e}^x \geqslant 0$ sur $[0, +\infty[$.
   (b) $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$ n'ont pas de point commun car g ne s'annule pas.
2. On note M le point d'abscisse x de $\mathscr{C}_f$, N le point d'abscisse x de la droite $\mathscr{D}$ et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN.
   (a) $M(x,f(x))$ et $N(x,x-3)$. $MN = \sqrt{(x-x)^2 + (f(x)-(x-3))^2} = \sqrt{(g(x))^2} = |g(x)| = g(x)$ car g est positive.
   (b) $g'(x) = -5\mathrm{e}^{-x} + 6\mathrm{e}^{-2x}$
   (c) $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x < \frac{6}{5} \Leftrightarrow x < \ln\left(\frac{6}{5}\right)$. La distance (suivant une vertical entre les deux courbes est minimale lorsque $x = \ln\left(\frac{6}{5}\right)$ et la distance est alors de $g\left(\ln\left(\frac{6}{5}\right)\right)$.

Exercice 28.

a) Notons $f : x \mapsto (x^2 + 3x + 2)\mathrm{e}^x$.
   * $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
   * $x^2 + 3x + 2 \underset{x\to\pm\infty}{\sim} x^2$. $x^2\mathrm{e}^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Croissance comparée : $x^2\mathrm{e}^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Axe des abscisses est asymptote à la courbe en $-\infty$.
   * f est dérivable sur $\mathbb{R}$ ce qui signifie que sa courbe représentative est sans piquants.
   * $f'(x) = (2x+3)\mathrm{e}^x + (x^2+3x+2)\mathrm{e}^x = (x^2+5x+5)\mathrm{e} = \left(x - \frac{-5-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-5+\sqrt{5}}{2}\right)\mathrm{e}^x$. f strictement croissante sur $\left]-\infty, \frac{-5-\sqrt{5}}{2}\right]$ t sur $\left[\frac{-5+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{-5-\sqrt{5}}{2}, \frac{-5+\sqrt{5}}{2}\right]$. Un sommet de coordonnées $\left(\frac{-5-\sqrt{5}}{2}, f\left(\left(\frac{-5-\sqrt{5}}{2}\right)\right)\right)$ et l'autre $\left(\frac{-5+\sqrt{5}}{2}, f\left(\frac{-5+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$. En ces sommets des tangentes horizontales.
   * $f(0) = 2$ donc la courbe passe par le point de coordonnées $(0;2)$. $f(1) = 6\mathrm{e}$ avec $\mathrm{e} \approx 2{,}71$.
   * f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = (2x+5)\mathrm{e}^x + (x^2+5x+5)\mathrm{e}^x = (x^2+7x+10)\mathrm{e}^x = (x-5)(x+2)\mathrm{e}^x$. f est concave sur $]-\infty, -2]$ et sur $[5, +\infty[$ et concave sur $[-2;5]$. Les points de coordonnées $(-2;0)$ et $(5;42\mathrm{e}^5)$ sont des points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.
   * Nous avons déjà obtenus un zéro : -2. L'autre racine de x^2+3x+2 est donc -1. La courbe passe par le point de coordonnées $(-1;0)$.

b) Notons $f : x \mapsto \mathrm{e}^x \sin(x)$.
   * $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$. On peut limiter le domaine d'étude en utilisant le fait qu'il y a de la pseudo périodicité avec un agrandissement.
   * f est du même signe que sin et s'annule en $0 + k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
   * $-\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^x \sin(x) \leqslant \mathrm{e}^x$. $\mathrm{e}^x \sin(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$. Pas de limite en $+\infty$ car $(\mathrm{e}^{\frac{n\pi}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right))$ diverge vers $+\infty$ et $(\mathrm{e}^{\frac{n\pi}{2}+\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}+\pi\right))$ diverge vers $-\infty$.
   * f dérivable sur $\mathbb{R}$.
   * $f'(x) = \mathrm{e}^x \sin(x) + \mathrm{e}^x \cos(x) = \mathrm{e}^x(\sin(x) + \cos(x))$. $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ et $\sin(x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}-x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-\frac{\pi}{2}+x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Donc f' est positif sur $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$ puis négatif sur $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{7pi}{4}\right]$.

c)

Exercice 29.

a) $\frac{0,96x}{0,93x+0,03}$. $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-0,3125\}$. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{0,96}{0,93}$ donc asymptotes horizontales. $\lim_{\substack{x\to-0,3125\\x>-0,3125}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x\to-0,3125\\x<-0,3125}} f(x) = +\infty$ donc asymptote verticale d'équation $x = -0,3125$. f est indéfiniment dérivable sur $\mathscr{D}_f$. $f'(x) = \frac{0,96(0,93x+0,03)-0,96x0,93}{(0,93x+0,03)^2} = \frac{0,0288}{(0,93x+0,03)^2} > 0$ donc f est strictement croissante sur tous les intervalles où elle est définie. $f'' < 0$ donc f concave sur tous les intervalles où elle est définie. Comme f est une homographie il y a aussi une symétrie centrale de centre $\left(-0,3125; \frac{0,96}{0,93}\right)$

b) $2xe^{-x}$. f est définie et indéfiniment dérivable sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc asymptote horizontale en $+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. $f'(x) = (2-2x)e^{-x}$ est du signe de $1-x$ donc f strictement croissante sur $]-\infty,1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ d'où une tangente horizontale en 1. $f''(x) = (-2-(2-2x))e^{-x} = 2(x-2)e^{-x}$ donc f concave sur $]-\infty,2]$ et convexe sur $[2,+\infty[$ avec un point d'inflexion en $(2; 4e^{-2})$.

c) $\frac{e^x}{x-1}$. $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ asymptote horizontale $y = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = -\infty$ donc asymptote verticale d'équation $x = 1$. $f'(x) = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$ est du signe de $x-2$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty,2]$ et strictement croissante sur $[2,+\infty[$, de plus tangente horizontale en 2. $f''(x) =$

d) $10xe^{-0,01x} + 20$.

e) $(4x-2)e^{-x+1}$.

f) $x^2 - x\ln(x)$.

g) $x - \ln(x)$.

h) $x - 2 + \frac{1}{2}\ln(x)$.

i) $x - \ln(x^2+1)$.

j) $x^2 + 2x - 1 + \ln(x+2)$.

k) $\frac{4}{5-x}$.

l) $x - \ln\left(\frac{x}{4}\right)$.

m) $e^x + x$.

n) $(1-x^2)e^x$.

o) $8x^2(2-3\ln(x)) - 3$.

p) $\frac{6}{1+5e^{-x}}$.

q) $(20x+8)e^{-\frac{1}{4}x}$.

r) $(x^2-4)e^{-x}$.

s)

Exercice 30.

1. Discriminant de X^2+4X+5 : $4^2-4\times1\times5 = -4 < 0$ donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$. $\lim_{x\to\pm\infty} 1$ donc asymptote horizontale d'équation $y = 1$. $f'(x) = \frac{(2x+9)(x^2+4x+5)-(x^2+9x+15)(2x+4)}{(x^2+4x+5)^2} = \frac{2x^3+8x^2+10x+9x^2+36x+45-2x^3-18x}{(x^2+4x+5)^2}$ $\frac{-5x^2-20x-15}{(x^2+4x+5)^2} = -5\frac{x^2+4x+3}{(x^2+4x+5)^2}$. Le discriminant de X^2+4X+3 est $4^2-4\times1\times3 = 4$ donc f' s'annule en -3 et -1 et il y a des tangentes horizontales en ces points, comme le coefficient dominant de $X^2 4X+3$ est strictement positif f est strictement décroissante sur $]-\infty,-3]$, strictement croissante sur $[-3,-1]$ et strictement décroissante sur $[-1,+\infty[$.
2.

Exercice 31.

1. $f'(x) = -\sin(x) + x - \frac{x^3}{3!}$, $f''(x) = -\cos(x) + 1 - \frac{x^2}{2}$, $f^{(3)}(x) = \sin(x) - x$, $f^{(4)}(x) = \cos(x)$.
2.

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f^{(4)}$		$+$	0
$f^{(3)}$	0	$\nearrow$	$1-\frac{\pi}{2}$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f^{(3)}$	0	$+$	
f''	0	$\nearrow$	1

x	0		$\frac{\pi}{2}$
f''	0	$+$	
f'	0	$\nearrow$	$-1+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^3}{48}$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
f'	0	$+$	
f	$\frac{1}{2}-\frac{1}{24}$	$\nearrow$	$-1+\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^4}{384}$

3. $]0;1] \subset \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. $f'' < 1$ donc $1-\frac{x^2}{2} < \cos(x)$. $f(x) > 0$ donc $\cos(x) < 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$.

Exercice 32. $f_n^{(k)} = f_{n-k}$, Si k est impair $g_n^{(k)} = h_{n-k}$ et $h_n^{(k)} = g_{n-k}$ Si k est pair : $g_n^{(k)} = g_{n-k}$ et $h_n^{(k)} = h_{n-k}$.

Exercice 33.

1. Formule déjà démontrée : $(fg)^{(1)} = (fg)' = f'g + fg'$. Soit $k \in [\![1,n-1]\!]$. Supposons $(fg)^{(k)} = fg^{(k)} + \binom{k}{1}f^{(1)}g^{(k-1)} + \cdots + \binom{k}{k-1}f^{(k-1)}g^{(1)} + f^{(k)}g$. Toutes les fonctions, f, $f^{(1)}$, ...,$f^{(k)}$, $g^{(k)}$,...,g sont dérivables (une fois) donc on $(fg)^{(k)}$ est dérivable et : $\left((fg)^{(k)}\right)' = (fg)^{(k+1)} = \left[f'g^{(k)} + fg^{(k+1)}\right] + \binom{k}{1}\left[f^{(2)}g^{(k-1)} + f^{(1)}g^{(k)}\right] + \cdots + \binom{k}{k-1}\left[f^{(k)}g^{(1)} + f^{(k-1)}g^{(2)}\right] + \left[f^{(k+1)}g + f^{(k)}g^{(1)}\right]$. On réduit en additionnant : $\binom{k}{i-1}f^{(i)}g^{(k+1-i)} + \binom{k}{i}f^{(i)}g^{(k+1-i)} = \binom{k+1}{i}f^{(i)}g^{k+1-i}$ d'après la formule de Pascal.
2. $f : x \mapsto x^{2n}$. $f'(x) = 2nx^{2n-1}$, $f''(x) = 2n(2n-1)x^{2n-2}$, ..., $f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{n!}x^n$. $f'(x) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{n!}{(n-i)!}x^{2n-i}\frac{n!}{i)}x^{2n-(n-i)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{n!}{(n-i)!i!}n!x^{2n}$. Enfin en choisissant $x = 1$ on obtient : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Exercice 34. Il faut utiliser les formules de dérivation des fonctions composées.

1. Supposons $f(-x) = f(x)$ alors $-f'(-x) = f'(x)$.
2. Supposons $f(-x) = -f(x)$ alors $-f'(-x) = -f'(x)$.
3. Supposons $f(x+T) = f(x)$ alors $f'(x+T) = f'(x)$.

Exercice 35.

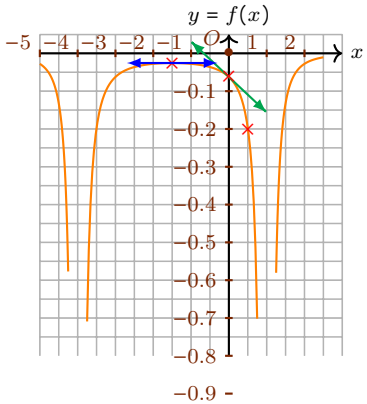
1. (a) 1 est racine évidente donc -4 est l'autre.
   (b) $\mathscr{D}_f \setminus \{1;-4\}$.
2. f n'est ni paire ni impaire car $\mathscr{D}_f$ n'est pas symétrique par rapport à 0.
3. $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{16}{81}$.
4. $f < 0$ la courbe représentative est toute entière au-dessous de l'axe des abscisses et ne le touche même pas.
5. (a) $f = -\frac{1}{u^2}$ donc $f'(x) = -\dfrac{-2\times(2x+3)}{(x^2+3x-4)^3} = \dfrac{4x+6}{(x^2+3x-4)^3}$ quel que soit $x \in \mathscr{D}_f$.
   (b) $4x+6 > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{3}{2},+\infty\right[$.
   (c) x^2+3x-4 est un trinôme de degré deux dont le coefficient dominant est positif et dont les racines sont 1 et -4 donc

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
x^2+3x-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

(d)

x	$-\infty$		-4		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
f'		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
f		↘	‖	↗	$-0{,}025\,6$	↘	‖	↗	$+\infty$

6. $f(0) = -\frac{1}{16}$ et $f'(0) = \frac{3}{32}$. $y = \frac{3}{32}x - \frac{1}{16}$.
7. Donner l'allure de $\mathscr{C}_f$ sur $[-2;2]$ dans le repère ci-dessous en indiquant les informations obtenues dans les questions précédentes. *Vous pourrez utiliser les approximations suivantes :* $-\frac{16}{81} \approx -0{,}2$; $-\frac{1}{16} \approx -0{,}06$; $-\frac{3}{32} \approx -0{,}1$.



8. Démontrez que $\mathscr{C}_f$ présente une symétrie axiale d'axe d'équation $x = \frac{3}{2}$.

3. Convexité, dérivée seconde.

I Définition.

Comme beaucoup d'anciennes notions mathématiques, la convexité trouve son origine dans la géométrie. La convexité est, à sa naissance, une propriété des ensembles de points de l'espace ou du plan. Un ensemble de point est dit convexe si tout couple de points de cet ensemble peut être relié par un segment qui ne sort pas de l'ensemble.

Puis cette notion a émergé dans une autre branche des mathématiques en analyse (étude des fonctions).

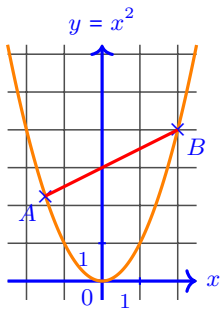
Les courbes représentatives de fonctions, du fait de la définition des fonctions, délimitent toujours le plan en deux parties : une partie au-dessus de la courbe et une autre au-dessous. La partie au-dessus, appelée épigraphe, peut être convexe et dans ce cas on dit que la fonction est convexe.

De même que certaines symétries des courbes représentatives se traduisent par une notion analytique (parité, périodicité), la convexité se traduit par ne propriété analytique de la fonction encore appelée convexité.

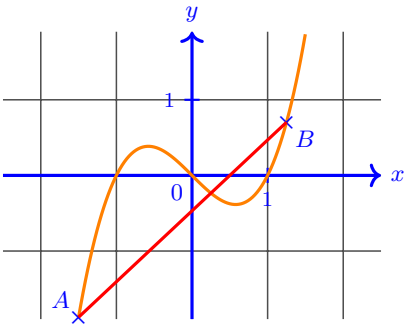
Définition 9. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Nous dirons que f est *convexe sur* I si et seulement si pour tous points A et B du graphe de f_I, $[AB]$ est tout entier au-dessus de ce graphe.

Exemples.

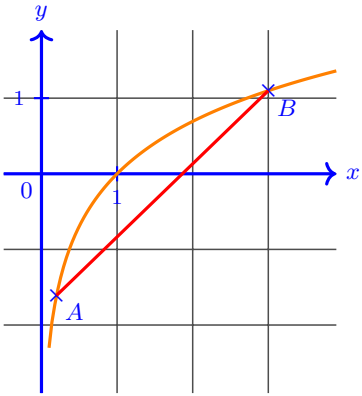
1. La fonction carré est convexe. Voici une sécante $[AB]$ et la courbe (pour les mêmes abscisses) est en dessous. Ceci serait valable pour n'importe quelles sécante.



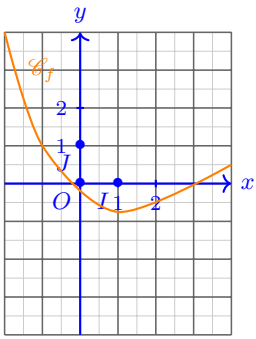
2. Cette fonction polynomiale de degré trois n'est pas convexe.



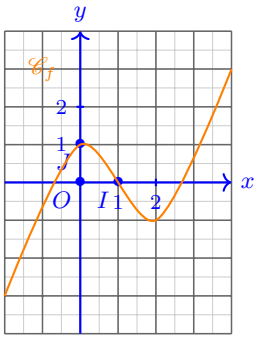
3. La fonction ln n'est pas concave.



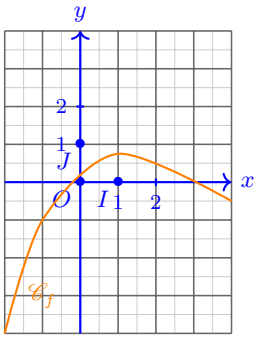
4. Voici la courbe représentative d'une fonction f convexe.



5. Voici la courbe représentative d'une fonction qui n'est pas convexe.



6. Encore un exemple de fonction qui n'est pas convexe.



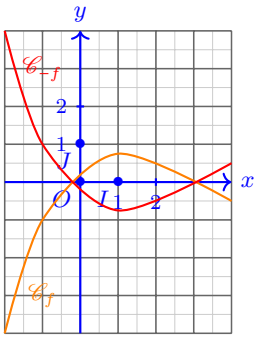
Remarques.

1. Nous n'utiliserons, *de facto*, jamais cette définition géométrique en classe hormis pour conjecturer (on voit que).

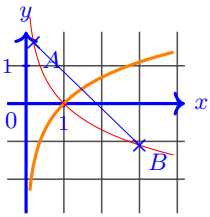
Définition 10. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. f est dite *concave* si et seulement si $-f$ est convexe.

Exemples.

1. La fonction $x \mapsto -x^2$ est concave puisque la fonction carré est convexe.
2. Courbe représentative d'une fonction f concave et celle de la fonction $-f$ qui s'obtient par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

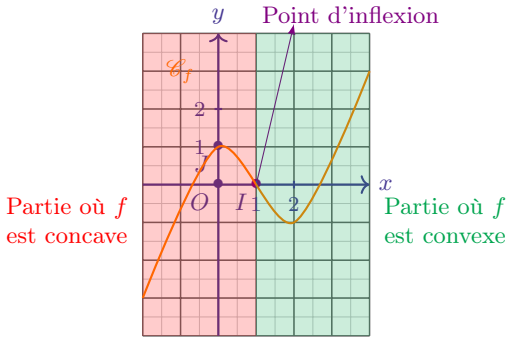


3. La fonction $x \mapsto -x^2$ est concave puisque la fonction carré est convexe.
4. ln est concave puisque sont opposé est convexe.



Remarques.

1. Les graphes de f et $-f$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
2. D'après la précédente remarque, dire que f est concave équivaut à dire que pour tous point A et B du graphe de f, $[AB]$ est tout entier au-dessous de ce graphe. Autrement dit le complémentaire de l'épigraphe dans le plan est une partie convexe.
3. Les fonctions peuvent changer de convexité suivant les parties du domaine de définition considérées.
4. Nous appellerons *point d'inflexion* les points du graphe d'une fonction où elle change de convexité : passant de concave à convexe ou de convexe à concave.



5. « Étudier la convexité d'une fonction » c'est déterminer les intervalles sur lesquels la fonction est concave et ceux où elle convexe ainsi que les points d'inflexion.
6. Il n'est pas possible de lire la convexité à partir du tableau de variation. Ce sont de nouvelles informations décrivant la courbe qui permette d'affiner le tracer à la main de la courbe représentative.

II Caractérisations pour les fonctions une fois dérivables.

Proposition 21. - *Caractérisation par les variations de la fonction dérivée.*
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f une fonction définie et dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.

Démonstration.

Remarques.

1. Nous avons une caractérisation équivalente pour la concavité : f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.
2. Avec cette caractérisation, $A \in \mathscr{C}_f$ d'abscisse a est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ si f' change de sens de variation en a.

Proposition 22. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie et dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. f est convexe sur I si et seulement si sa courbe représentative, $\mathscr{C}_f$, est au-dessus de toutes ses tangentes.

Démonstration. Étude du signe de $\Delta_a(x) = f(x) - \left[f'(a)(x-a) + f(a)\right]$ par tableau de variation et minimum.

Exemples.

1. Graphique : convexe.
2. Graphique concave.
3. Graphique un peu des deux et description par intervalles.

Remarques.

1. Intuitivement ce résultat n'est pas étonnant puisque les tangentes sont des positions limites des sécantes qui participent de la définition de la convexité.
2. Nous avons une caractérisation équivalente pour la concavité : f est concave sur I si et seulement si sa courbe représentative, $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de toutes ses tangentes.
3. Avec cette caractérisation, $A \in \mathscr{C}_f$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ si la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A traverse $\mathscr{C}_f$ en A.
4. Nous utiliserons ce résultat pour déterminer la position relative d'une tangente et la courbe représentative.

III Caractérisation pour les fonctions deux fois dérivables.

Proposition 23. - *Caractérisation par le signe de la fonction dérivée seconde.* Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie et deux fois dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I.

Démonstration. Démontrons que, si f'' est positive alors la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f est au-dessus de ses tangentes.

Si $f'' \geqslant 0$ alors f' est croissante est donc d'après une précédente proposition

$$\boxed{f \text{ est convexe.}}$$

Exemples.

1. Exemple graphique.
2. Exemples algébriques en listant les fonctions de référence.

Remarques.

1. Nous avons une caractérisation équivalente pour la concavité : f est concave sur I si et seulement si f'' est négative sur I.
2. Avec cette caractérisation, $A \in \mathscr{C}_f$ d'abscisse a est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ si f'' s'annule en changeant de signe en a.

IV Inégalités.

Proposition 24. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f est convexe sur I alors $\forall (x,y) \in I^2$, $\forall t \in [0;1]$, $f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$.

Remarques.

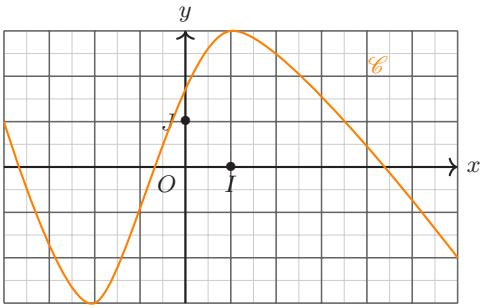
1. L'inégalité de Jensen comprends en fait le cas de plus de deux valeurs x_1, x_2, x_3, ...
2. Cette inégalité est souvent prise comme définition de la fonction convexe.
3. Pour une fonction concave : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\forall t \in [0;1]$, $f(tx + (1-t)y) \geqslant tf(x) + (1-t)f(y)$.

Proposition 25. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f est convexe sur I alors $\forall (x,y) \in I^2$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

V Exercices.

Exercice 36. Décrivez la convexité de la fonction f si

1. la courbe représentative ci-dessous est celle de f.
2. la courbe représentative ci-dessous est celle de f'.
3. la courbe représentative ci-dessous est celle de f''.



Exercice 37. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x + 1$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminez la convexité de f.
2. Déterminez une équation de la tangente au point d'abscisse 0.
3. Déduisez-en que pour tout réel x appartenant à $[-2, +\infty[$, $f(x) \geqslant x + 1$.
4. Retrouvez le précédent résultat en résolvant l'inéquation $f(x) \geqslant x + 1$.

Exercice 38. Étudiez la convexité de la fonction

1. $f : x \mapsto x^3 - 5x^2 + 4x + 3$ sur $\mathbb{R}$.
2. $g : x \mapsto \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 39. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$. Nous admettons que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f est paire.
2. Étudiez le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$.
3. Étudiez la limite de f en $+\infty$.
4. Déduisez des questions précédentes le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminez l'équation de la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f au point d'abscisse 3.
6. (a) Vérifiez que pour tout réel x, $f''(x) = \dfrac{9}{(x^2 + 9)\sqrt{x^2 + 9}}$.
   (b) Déduisez-en les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et Δ.

Exercice 40. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^6 + 3x^2 + 6$.

1. Montrez que f est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminez une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse 1.
3. Déduisez-en que pour tout réel x : $x^6 + 3x^2 + 6 \geqslant 12x - 2$.

Exercice 41. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Montrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{4}{x+5} \leqslant \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{5}$.

2. Déterminez une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 et déduisez-en que, pour tout nombre réel x strictement positif, $\frac{1}{x} \geqslant -\frac{x}{4} + 1$.

Exercice 42. Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^3$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

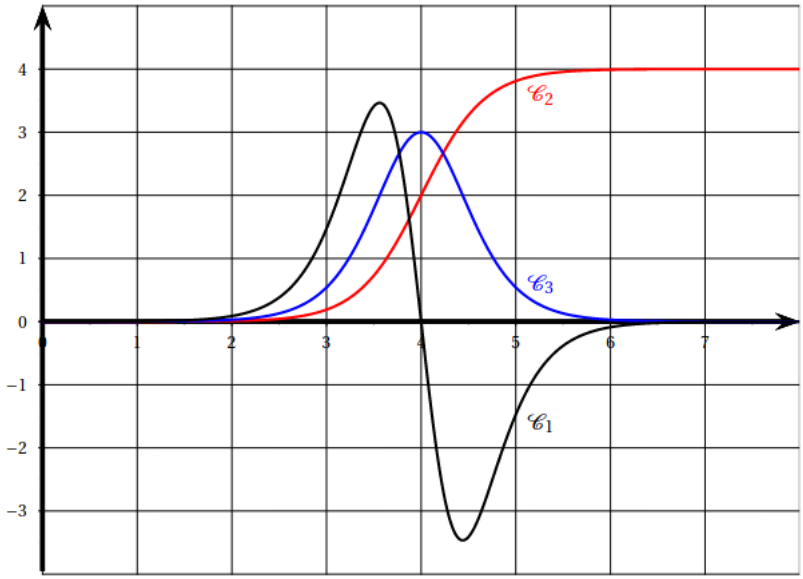
1. Montrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $(x+1)^3 \leqslant 4x^3 + 4$.
2. Déterminez une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 et déduisez-en que, pour tout nombre réel x positif, $x^3 \geqslant 3x - 2$.
3. h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 5$. En utilisant l'inégalité précédente, montrez que la fonction h est croissante sur $[0, +\infty[$.

Exercice 43. On appelle « satisfaction » toute fonction dérivable qui prend des valeurs comprises entre 0 et 100. Lorsque la fonction « satisfaction » atteint 100 on dit qu'il y a « saturation ». On définit aussi la fonction « envie » comme la fonction dérivée de la fonction « satisfaction ». La direction des ressources humaines d'une entreprise modélise la satisfaction d'un salarié en fonction du salaire annuel qu'il perçoit. On admet que la fonction satisfaction h est définie sur $[10; 50]$ par : $h(x) = \frac{90}{1+\mathrm{e}^{-0,25x+6}}$, où x est exprimé en milliers d'euros. On note $\mathscr{C}_h$ la courbe représentative de la fonction h.

1. Par lecture graphique sur votre calculatrice conjecturez la convexité de la fonction h ainsi que le sens de variation de la fonction « envie ». Donnez-en une interprétation.
2. D'après ce modèle serait-il possible d'atteindre la saturation ?
3. Vérifiez que pour tout $x \in [10; 50]$: $h''(x) = \frac{5,625\mathrm{e}^{-0,25x+6}\left(\mathrm{e}^{-0,25x+6}-1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-0,25x+6}\right)^3}$.
4. Déduisez-en la convexité de la fonction h.
5. À partir de quel salaire annuel peut-on estimer que la fonction « envie » décroît ?

Exercice 44. **Partie A**

Le plan est ramené à un repère orthogonal. On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que celle de sa dérivée f' et de sa dérivée seconde f''.



1. Déterminer, en justifiant votre choix, quelle courbe correspond à quelle fonction.
2. Déterminer, avec la précision permise par le graphique, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_2$ au point d'abscisse 4.
3. Donner avec la précision permise par le graphique, l'abscisse de chaque point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_1$.

Partie B

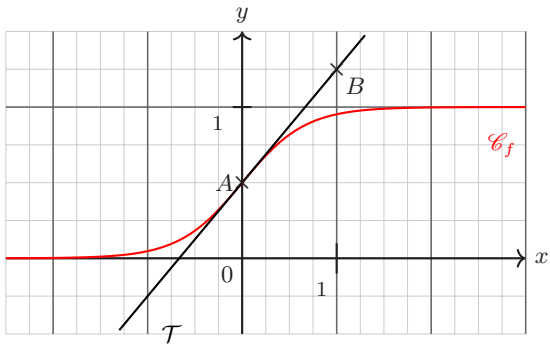
Soit un réel k strictement positif.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{4}{1+\mathrm{e}^{-kx}}$.

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$,
2. Prouver que $g'(0) = k$.
3. En admettant le résultat ci-dessous obtenu avec un logiciel de calcul formel, prouver que la courbe de g admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0.

▷ Calcul formel	
1	g(x) =4/(1 + e^(-kx)) $\rightarrow g(x) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^{-kx}+1}$
2	Simplifier($g''(x)$) $\rightarrow g''(x) = -4\mathrm{e}^{kx}\left(\mathrm{e}^{kx}-1\right)\dfrac{k^2}{\left(\mathrm{e}^{kx}+1\right)^3}$

Exercice 45. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-3x}}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan. On nomme A le point de coordonnées $\left(0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ et B le point de coordonnées $\left(1\ ;\ \dfrac{5}{4}\right)$. On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.



Partie A : lectures graphiques

Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

Partie B : étude de la fonction

1. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'expression de sa fonction dérivée f'.
2. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f.
   (b) Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction f.
4. *Question infaisable sans la fonction logarithme népérien.* Déterminer la valeur exacte de la solution α de l'équation $f(x) = 0{,}99$.

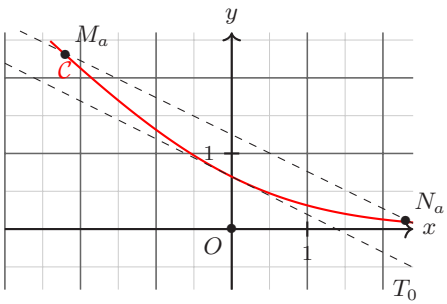
Partie C : Tangente et convexité

1. Déterminer par le calcul une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f. On admet que f'' est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f''(x) = \dfrac{9\mathrm{e}^{-3x}\left(\mathrm{e}^{-3x}-1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^3}$.

2. Étudier le signe de la fonction f'' sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Indiquer, en justifiant, sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est convexe.
   (b) Que représente le point A pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
   (c) En déduire la position relative de la tangente $\mathcal{T}$ et de la courbe $\mathcal{C}_f$. Justifier la réponse.

Exercice 46. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. La courbe $\mathcal{C}$ est tracée ci-dessous.



1. (a) Déterminez la limite de la fonction f en $-\infty$.
   (b) Déterminez la limite de la fonction f en $+\infty$. Interprétez graphiquement ce résultat.
   (c) On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Calculez $f'(x)$ puis montrez que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{-1}{1+\mathrm{e}^x}$.
   (d) Dressez le tableau de variations complet de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. On note T_0 la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 0.
   (a) Déterminez une équation de la tangente T_0.
   (b) Montrez que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.
   (c) Déduisez-en que, pour tout nombre réel x, on a : $f(x) \geqslant -\dfrac{1}{2}x + \ln(2)$.
3. Pour tout nombre réel a différent de 0, on note M_a et N_a les points de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives $-a$ et a. On a donc : $M_a\left(-a\ ;\ f(-a)\right)$ et $N_a\left(a\ ;\ f(a)\right)$.

(a) Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $f(x) - f(-x) = -x$.
(b) En déduire que les droites T_0 et $(M_a N_a)$ sont parallèles.

VI Corrections.

Exercice 36.

1. Convexe sur $]-\infty, -0{,}5[$ et concave sur $]-0{,}5, +\infty[$. Point d'inflexion de coordonnées $A(-0{,}5; 0{,}5)$.
2. Concave sur $]-\infty, -2[$ et sur $]1, +\infty[$. Convexe sur $]-2; 1[$. Points d'inflexion de d'abscisses -2 et 1.
3. Convexe sur $]-\infty; -3{,}6[$ et sur $]-0{,}75; 4{,}4[$. Concave sur $]-3{,}6; -0{,}75[$ et sur $]4{,}4; +\infty[$. Point d'inflexion d'abscisses $-3{,}6$ et $-0{,}75$ et $4{,}4$.

Exercice 37.

1. $f'(x) = (1+x)\mathrm{e}^x$. $f''(x) = (2+x)\mathrm{e}^x$.
2. $T_0 :\ y = x + 1$.
3. Position de la courbe et de la tangente en 0.
4.

Exercice 38.

1. $f'(x) = 3x^2 - 10x + 4$ puis $f''(x) = 6x - 10$. f convexe sur $\left[\frac{5}{3},; +\infty\right[$ et concave sinon.
2. $g'(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{x^2}$ puis $g''(x) = -\frac{6}{x^3}$. g est convexe sur $\mathbb{R}_-$.

Exercice 39.

1. Démontrons que f est paire.

   * $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.

   * Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 9} = \sqrt{x^2 + 9} = f(x)$.

   $$\boxed{f \text{ est paire.}}$$

2. Par translation et composition il est claire que $f_{|\mathbb{R}_+}$ est croissante.
   Étudions les variations de f.
   $f = \sqrt{u}$ où $u : x \mapsto x^2 + 9$.
   Or u est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $u > 0$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

   $$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

   $f'(x)$ est du signe de x.

   $$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+.}$$

3. Étudions la convergence de f en $+\infty$.
   $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, donc en sommant $\lim_{x\to+\infty} x^2 + 9 = +\infty$ puis, comme $\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$, en composant

   $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

4. Dressons le tableau de variation de f.
   Par parité de f on déduit de ce qui précède ce qu'il en est sur $\mathbb{R}_-$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$+\infty$ ↘	3	↗ $+\infty$

5. Déterminons une équation de Δ.
$f'(3) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $f(3) = 3\sqrt{2}$ donc $\Delta :\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-3) + 3\sqrt{2}$.

$$\Delta :\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

6. (a) Déterminons l'expression algébrique de f''.
$f' = \frac{v}{f}$ où $v : x \mapsto x$. v et f sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $f > 0$, d'après le précédent tableau de variation, donc f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\sqrt{x^2+9} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9} \\ &= \frac{\frac{x^2+9-x^2}{\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9} \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \frac{9}{\sqrt{x^2+9}(x^2+9)}.$$

(b) Étudions la position relatives de Δ et $\mathscr{C}_f$.
$f'' > 0$ donc f est convexe donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes.

$\mathscr{C}_f$ est au-dessus de Δ.

Exercice 40.

1. $f'(x) = 6x^5 + 6x$ et $f''(x) = 30x^4 + 6 > 0$ donc f est convexe.
2. $f(1) = 10$ et $f'(1) = 12$ donc $T :\ y = 12x - 2$
3. f étant convexe sa courbe représentatives est au-dessus de toutes ses tangentes. En particulier : $f(x) > 12x - 2$.

Exercice 41.

1. f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ donc

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+5}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(5)}{2} &\iff \frac{1}{\frac{x+5}{2}} \leqslant \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{5}}{2} \\ &\iff \frac{2}{x+5} \leqslant \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{5}}{2} \\ &\iff \frac{4}{x+5} \leqslant \frac{1}{x} + \frac{1}{5} \text{ car } 2 > 0 \end{aligned}$$

2. $y = -\frac{1}{2^2}(x-2) + \frac{1}{2} \iff y = -\frac{1}{4}x + 1$.
f est convexe donc sa courbe représentative est au-dessus de toutes ses tangentes : $f(x) \geqslant -\frac{1}{4}x + 1$.

Exercice 42.

1. $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$ donc pour $y = 1$, $\left(\frac{x+1}{2}\right)^3 \leqslant \frac{x^3+1^3}{2}$.
2. $f'(1) = 3$, $f(1) = 1$, $y = 3x + 2$.

3. $h'(x) = x^3 - 3x + 2$.

Exercice 43.

1. Satisfaction convexe puis concave point. Envie croissante puis décroissante.
2. Limite de 90 donc pas de saturation possible.
3.
4. $\mathrm{e}^{-0,25x+6} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 24$.
5. À partir d'un salaire de 24 000 euros.

Exercice 44. A

1. $\mathscr{C}_1$ correspond à f', $\mathscr{C}_3$ à f' et $\mathscr{C}_2$ à f.
2. $f'(4) = 0$
3. 3,4, 4, 4,6.

B

1. $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 4$ et $\lim_{x\to-\infty} = 0$.
2. $g'(x) = \frac{4k\mathrm{e}^{-kx}}{(1+\mathrm{e}^{-kx}}$ et donc $g'(0) = k$.
3. $g''(x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{kx} - 1 = 0 \Leftrightarrow kx = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Exercice 45. A

1. $\mathcal{T}:\ y = v\frac{3}{4}x + 0,5$.
2. Convexe sur $]-\infty,0]$ et concave sur $[0,+\infty[$.

B

1. $f'(x) = \frac{3\mathrm{e}^{-3x}}{(1+\mathrm{e}^{-3x})^2}$.
2. $f' > 0$.
3. (a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
   (b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
4.

$$f(x) = 0,99 \Leftrightarrow \frac{1}{0,99} - 1 = \mathrm{e}^{-3x}$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{0,99} - 1\right)$$

C

1. $f''(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-3x} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x < 0$. f convexe sur $\mathbb{R}_-$ et concave sur $\mathbb{R}_+$.
2. f'' s'annule en changeant de signe en $x_A = 0$ donc A est un point d'inflexion.
3. $\mathcal{C}_f$ est au dessus de ses tangentes sur $\mathbb{R}_-$ car f y est convexe donc $\mathcal{C}_f$ est su-dessus de $\mathcal{T}$ sur $\mathbb{R}_-$. De même $\mathcal{C}_f$ est dessous de $\mathcal{T}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 46.

1. (a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
   (b) $\lim x \to +\infty f(x) = 0$. Asymptote horizontale d'équation $y = 0$.
   (c) $f = \ln(u)$. $f'(x) = \frac{-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{-x}\times 1}{\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{x}+1)} = \frac{-1}{1+\mathrm{e}^{x}}$.
   (d)

x	$-\infty$	$+\infty$
f'	$-$	
f	$+\infty$ ↘	0

2. (a) $f(0) = \ln(2)$ et $f'(0) = -\frac{1}{2}$ donc $T_0:\ y = -\frac{1}{2}x + \ln(2)$.
   (b) $f''(x) = \frac{\mathrm{e}^{x}}{(1+\mathrm{e}^{x})^2} > 0$ donc f est convexe.

(c) La courbe représentative de f est au-dessus de toutes ses tangentes car f convexe en particulier : $f(x) \geqslant -\frac{1}{2}x + \ln(2)$

3. Pour tout nombre réel a différent de 0, on note M_a et N_a les points de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives $-a$ et a. On a donc : $M_a\,(-a\ ;\ f(-a))$ et $N_a\,(a\ ;\ f(a))$.

   (a) $f(x) - f(-x) = \ln(1 + \mathrm{e}^{-x}) - \ln(1 + \mathrm{e}^{x}) = \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{x}}\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{-x}\,\frac{\mathrm{e}^{x}+1}{1+\mathrm{e}^{x}}\right) = -x.$

   (b) Le coefficient directeur de $(M_a N_a)$: $\frac{f(a)-f(-a)}{a-(-a)} = \frac{-a}{2a} = -\frac{1}{2}$.

4. Limites de fonctions.

Nous avons déjà vu des limites celles de suites. Avec les fonctions la variété des situation est beaucoup plus importante. La variable d'une suite est un entier naturel il ne peut que tendre indéfiniment vers $+\infty$. Pour une variable x nous pourrons nous rapproché indéfiniment d'un réel (par la droite ou par la gauche), ou tendre vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. Penser à l'hyperbole, courbe représentative de la fonction inverse, permet de se représenter les situations que nous allons décrire.

I Étude d'une fonction, étude des limites.

Dorénavant lorsqu'on vous demandera d'étudier une fonction il faudra étudier ses limites aux bornes ouvertes du domaines de définition.

Exemples.

1. L'étude d'une fonction f définie sur $]-1;2[\cup[3,+\infty[$ nécessitera la détermination de $\lim_{x\to -1} f(x)$, $\lim_{x\to 2} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

Remarques.

1. Nous nous ferons désormais un devoir de compléter les tableaux de variations par les limites. Ainsi :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto x^2$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
$x \mapsto x^3$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

II Voisinage d'une valeur a.

Soit $a \in \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$. Ainsi a peut être un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Nous nous intéresserons à la limite de la quantité $f(x)$ lorsque x se rapproche de a où a peut être un nombre ou un infini. Si $a \in \mathbb{R}$ nous appellerons *voisinage ouvert de a* tout intervalle ouvert contenant a. Nous appellerons *voisinage ouvert de* $+\infty$ tout intervalle de la forme $]A,+\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$. Nous appellerons *voisinage ouvert de* $-\infty$ tout intervalle de la forme $]-\infty,A[$ où $A \in \mathbb{R}$. Le voisinage est un outil pour définir les limites de fonctions.

Exemples.

1. $]-1{,}2;0{,}5[$ est un voisinage ouvert de 0 par contre $]2;4[$ n'en n'est pas un.
2. $]1;4[$ est un voisinage ouvert de π.
3. $]2;3[$ est un voisinage ouvert de e.

4. $]-\infty,4[$ est un voisinage ouvert de $-\infty$.
5. $\mathbb{R}$ est un voisinage ouvert de n'importe quel nombre, de $+\infty$ et de $-\infty$.

III Définition de la limite d'une fonction en a.

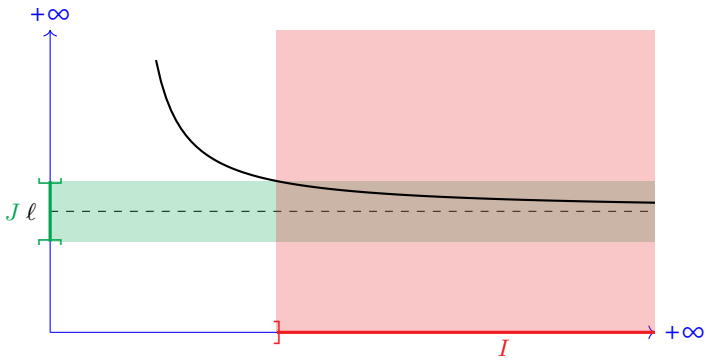
Définition 11. Soient $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathscr{D} \cup \{+\infty, -\infty\}$, $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ une application. Nous dirons que *f admet ℓ pour limite en a* si et seulement si, quelque soit le voisinage ouvert J de ℓ, il existe un voisinage ouvert I de a tel que : $\forall x \in I,\ f(x) \in J$.

Remarques.

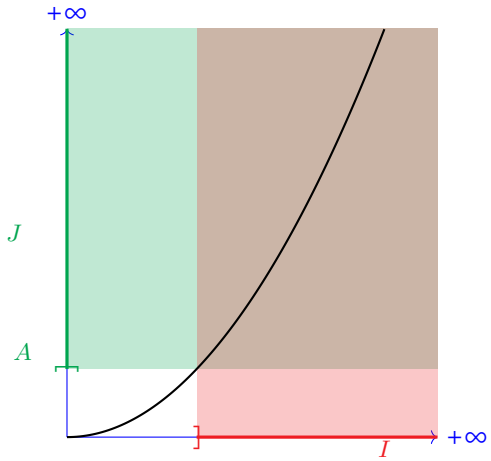
1. Une application est une fonction dont le domaine de définition coïncide avec l'ensemble de départ.
2. Si f admet ℓ pour limite en a alors nous noterons $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ ou encore $\lim_a f = \ell$.
3. Voici une visualisation de cette définition avec Geogebra.

Exemples.

1. Au voisinage de $a = +\infty$, $f(x)$ semble...

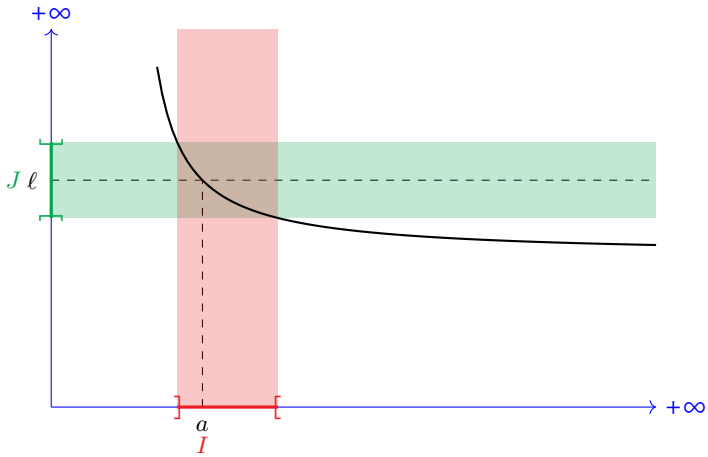


   ... se rapprocher de $\ell \in \mathbb{R}$.
   Quel que soit le voisinage ouvert, $J =]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$, de ℓ, il existe un voisinage I, de $+\infty$, tel que : $\forall x \in I,\ f(x) \in J$.
2. Au voisinage de $a = +\infty$, $f(x)$ semble...



... augmenter sans limitation, $f(x)$ tend vers $+\infty$.
Quel que soit le voisinage ouvert, $J =]A, +\infty[$, de $+\infty$, il existe un voisinage I, de $+\infty$, tel que : $\forall x \in I,\ f(x) \in J$.

3. Au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, $f(x)$ semble...



... se rapprocher de $\ell \in \mathbb{R}$.
Quel que soit le voisinage ouvert, $J =]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$, de ℓ, il existe un voisinage I, de a, tel que : $\forall x \in I,\ f(x) \in J$.

IV Définition de la limite d'une fonction en a par valeurs inférieures ou supérieures.

Pour l'instant, si la fonction étudiée est définie sur $]0, +\infty[$ nous avons défini la limite en $+\infty$ mais pas celle en 0. Cependant faire tendre x vers 0 pose problème car nous ne trouverons pas d'intervalle ouvert contenant 0 et qui soit inclus dans $]0, +\infty[$. Nous devons adapter la définition pour indiquer que nous ne considérons que de x supérieurs à 0.

Définition 12. Soient $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ une application. Nous dirons que *f admet ℓ pour limite à gauche en a* si et seulement si, quelque soit le voisinage ouvert J de ℓ, il existe un voisinage ouvert I de a tel que : $\forall x \in]-\infty, a[\cap I \cap \mathscr{D}$, $f(x) \in J$.

Remarques.

1. On définit de même la *limite à droite en a* : f admet ℓ pour limite à droite en a si et seulement si, quelque soit le voisinage ouvert J de ℓ, il existe un voisinage ouvert I de a tel que : $\forall x \in]a, +\infty[\cap I$, $f(x) \in J$.
2. Au lieu de dire « limite à droite » nous dirons parfois « *limite par valeurs supérieures* » et au lieu de « limite à gauche » nous dirons tout aussi bien « *limite par valeurs inférieures*.
3. Si f admet ℓ pour limite à droite en a on note : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x > a}}{\longrightarrow} \ell$ ou $\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell$. Cette dernière notation est incorrecte mais parfois utilisée.
4. Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \pm\infty$ alors, pour décrire la situation graphique, nous dirons que $\mathscr{C}_f$, *la courbe représentative de f admet une asymptote verticale en a*, ou encore que $\mathscr{C}_f$ *admet une asymptote d'équation $x = a$*.
5. Les résultats précédemment vus sur les limites restent valables pour ces limites à gauche et à droite.

V Interprétation géométrique des limites finies en l'infini.

Définition 13. Soient $\ell \in \mathbb{R}$, f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. Nous dirons que *la droite $y = \ell$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$* (respectivement en$-\infty$) si et seulement si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (resp. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$).

Remarques.

1. Autrement dit si f admet une limite fini en $\pm\infty$ alors la courbe représentative de f, à l'infini semble se confondre avec la droite d'équation $y = \ell$.

VI Interprétation géométrique des limites infinies en un réel.

Définition 14. Soient $a \in \mathbb{R}$, f une fonction définie au voisinage de a. Nous dirons que *la droite $x = a$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$* si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \pm\infty$.

Remarques.

1. Autrement dit si f admet une limite infini en un réel a alors la courbe représentative de f, à l'abscisse a semble monter $(+\infty)$ ou descendre $(-\infty)$ jusqu'à se confondre avec la droite d'équation $x = a$.
2. On obtient, éventuellement, des asymptotes au bornes ouvertes du domaine de définition. Ainsi $x \mapsto \frac{1}{x-2}$ qui est définie sur $]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$ est susceptible d'avoir une asymptote vertical en 2 (ici il faudra considérer limites à gauche et à droite).

VII Exemples de référence.

Nous avons avec les suites vu la plupart des situations de limites à connaître avec les fonctions. Ainsi $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x$ se retrouve par analogie avec $\lim_{n \to +\infty} \mathrm{e}^n$. De même $\lim_{x \to 0} x(x^2 - 1)$ se retrouve avec $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 - 1\right)$

Proposition 26. Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

(i) $\lim_{x\to+\infty} x^m = +\infty$. Si m est pair alors : $\lim_{x\to-\infty} x^m = +\infty$. Si m est impair alors : $\lim_{x\to-\infty} x^m = -\infty$.
(ii) $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.
(iii) $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln(x) = -\infty$. $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
(iv) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.
(v) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^m} = 0$. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^m} = 0$.
(vi) $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x^m} = +\infty$. Si m est pair alors $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1}{x^m} = +\infty$. Si m est impair alors $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1}{x^m} = -\infty$.

VIII Opérations sur les limites.

Proposition 27. - Limites et additions. Soient $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathscr{D} \cup \{+\infty, -\infty\}$, $m,\ell \in \mathbb{R}$, $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ des applications.

Limites de la fonction $f + g$ en a :

f \ g	ℓ	$+\infty$	$-\infty$.
m	$m+\ell$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

Limites de la fonction $f \times g$ en a :

f \ g	$\ell > 0$	$\ell = 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$m > 0$	$m\ell$	0	$m\ell$	$+\infty$	$-\infty$
$m = 0$	0	0	0	?	?
$m < 0$	$m\ell$	0	$m\ell$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Limites de la fonction $\frac{1}{f}$ en a (0^+ symbolise le fait que f tend vers 0 mais que de plus f prend des valeurs positives au voisinage de a, tandis 0^- signifie que f tend vers 0 mais en prenant des valeurs négatives) :

f	$\ell \neq 0$	$\ell = 0$	$\ell = 0^+$	$\ell = 0^-$	$+\infty$	$-\infty$
$\frac{1}{f}$	$\frac{1}{\ell}$	?	$+\infty$	$-\infty$	0	0

Limites de la fonction $\frac{f}{g}$ en a :

f \ g	$\ell > 0$	$\ell = 0^+$	$\ell = 0^-$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$m > 0$	$\frac{m}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{m}{\ell}$	0	0
$m = 0$	0	?	?	0	0	0
$m < 0$	$\frac{m}{\ell}$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{m}{\ell}$	0	0
$+\infty$	$+\infty$	?	?	$-\infty$	?	?
$-\infty$	$-\infty$	?	?	$+\infty$	?	?

Exemples.

1. $x^4 + \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. Nous ne pouvons pas donner la limite de $x \mapsto \mathrm{e}^x - \ln(x)$ en $+\infty$ car il s'agit d'une forme indéterminée $(+\infty - (+\infty))$.
3. La recherche de limite de $f(x) = \frac{1}{x} \times \mathrm{e}^x$ en $+\infty$ conduit à une forme indéterminée $(0 \times (+\infty))$.
4. Recherchons l'éventuelle limite de $x \mapsto x^3 \ln(x)$ en $+\infty$.

$$\begin{cases} \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \\ x^3 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{cases},$$

donc

$$\boxed{x^3 \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

5. Recherchons l'éventuelle limite de $x \mapsto 4x^2 - 3x + 1$ en $-\infty$.
Par combinaison linéaire $(4 \times (+\infty) - 3 \times (-\infty) + 1)$:

$$\boxed{4x^2 - 3x + 1 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

6. La recherche de limite de $x \mapsto x^2 - x$ en $+\infty$ conduit à une forme indéterminée $(+\infty - (\infty))$: nous ne pouvons conclure quant à la limite de la fonction en $+\infty$.

Remarques.

1. Il faudra surtout retenir les formes indéterminées qui sont les situations appelant une étude plus poussée dans les exercices. Schématiquement les formes indéterminées sont : $+\infty + (-\infty)$, $0 \times \infty$, $\frac{\cdot}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemples.

1. $\frac{1}{\sqrt{x}+3} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. $\frac{2}{x+1} + \frac{1}{\mathrm{e}^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. $x^3 h \frac{4}{x^2+x2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

En combinant inverse et produit nous obtenons de nouveaux résultats sur les limites de fonctions.

Exercice 47. Déterminez les limites puis donnez en un interprétation géométrique.

a) $\frac{1}{x^2} + 3$ en $+\infty$.
b) $\frac{1}{\mathrm{e}^x + x^2}$ en $-\infty$.
c) $x^3 + \frac{-2}{x^2}$ en 0^+.
d) $x^{-2} + \frac{17}{\mathrm{e}^x} - 5$ en $+\infty$.
e) $-4\mathrm{e}^x + x^{-12}$ en $-\infty$.
f) $\frac{x^4}{3x^5+1}$ en $-\infty$.

IX Lever l'indétermination : expressions polynomiales et factions rationnelles.

Un polynôme est une expression algébrique formée d'une somme de monôme, c'est-à-dire d'expression ax^n (avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$). Le degré du monôme ax^n est la puissance n.

Dans des expressions polynomiales la factorisation par le monôme dominant permet de lever les indéterminations (de la forme $+\infty - (+\infty)$) en $\pm\infty$.

Exemples.

1. On cherche à déterminer la limite éventuelle de $P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 5x + 1$ en $+\infty$.
   On essaye d'abord de passer à la limite directement : c'est une combinaison linéaire de fonctions de référence est l'on obtient schématiquement : $-2 \times (+\infty) + 4 \times (+\infty) + 5 \times (+\infty) + 1$.
   Il s'agit d'une forme indéterminée « $+\infty + (-\infty)$ ».
   Alors nous factorisons par le monôme dominant $-2x^3$.

$$\begin{aligned} P(x) &= -2x^3\left(\frac{-2x^3}{-2x^3} + \frac{4x^2}{-2x^3} + \frac{5x}{-2x^3} + \frac{1}{-2x^3}\right) \\ &= -2x^3\left(1 - 2 \times \frac{1}{x} - \frac{2}{5} \times \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^3}\right) \end{aligned}$$

   Or : $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} 1 - 2 \times \frac{1}{x} - \frac{2}{5} \times \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^3} = 1 \\ \lim_{x\to+\infty} -2x^3 = -\infty \end{cases}$ donc, par produit : $\lim_{x\to+\infty} P(x) = -\infty$.

2. Soit $F(x) = \frac{4x^3+2x}{3x^7+1}$. Forme indéterminée mais $F(x) = \frac{4x^3\left(1+\frac{1}{2x^2}\right)}{3x^7\left(1+\frac{1}{2x^7}\right)} = \frac{4}{3x^4} \times \frac{1+\frac{1}{2x^2}}{1+\frac{1}{2x^7}}$. Or $\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{2x^2} = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{2x^7} = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{4}{3x^4} = 0$ donc par produit : $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

Exercice 48. Soit f une fonction polynomiale de degré 3. Étudiez les limites de f à l'infini.

Exercice 49. Déterminez les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction f dans les cas suivants.

a) $f : x \mapsto -2x^7 + 4x^3 + x$.

b) $f : x \mapsto x^3 + 4x^2 - x^4$.

c) $f : x \mapsto \dfrac{2x^4 - 3x^3 + x^2 + x + 1}{4x^3 + 2x + 7}$.

d) $f : x \mapsto \dfrac{2x^3 + 10x^2 + x}{x^{12} + 1}$.

e) $f : x \mapsto \dfrac{7x^{32} - 13x^{17} + x + 2}{-3x^{32} + x + \pi}$.

f) $f : x \mapsto \dfrac{2x^5 - x^3 + x^6}{2x^4 + x^4 + x^7}$.

X Lever une indétermination : factoriser pour faire apparaître une croissance comparée.

Nous retrouvons les mêmes résultats de croissances comparées, au voisinage de $+\infty$, qu'avec les suites que nous ne répéterons pas. Indiquons de nouveaux résultats.

Proposition 28.

(i) $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.

(ii) $\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} x^n \ln(x) = 0$.

Remarques.

1. Il faut factoriser par la fonction qui domine au voisinage considéré. S'il y a du x^n et du e^x et qu'il y a une indétermination on factorise par e^x. S'il y a du x^n et du $\ln(x)$ on factorise par x^n.

Exercice 50. Déterminez les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3xe^x + 2e^x - 1$.
b) $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - e^2x - x^3e^x$.
c) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \dfrac{4e^x}{x}$.
d) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{e^x}{2x^2}$.
e) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{4e^x}{\sqrt{x}}$.
f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}e^x}{x}$.
g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x}{e}$.
h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5-3x}{e^x}$.
i) $\lim\limits_{x\to+\infty} (5x-1)e^x$.
j) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+x+3)e^x$.
k) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x - e^x$.
l) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 - 2e^x$.
m) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - xe^x$.
n) $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - x)e^x$.

XI Limites et compositions.

Proposition 29. Soient $\mathscr{D}_f \subset \mathbb{R}$, $\mathscr{D}_g \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathscr{D}_f \cup \{+\infty, -\infty\}$, $b \in \mathscr{D}_g \cup \{+\infty, -\infty\}$, $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ et $g : \mathscr{D}_g \to \mathbb{R}$ des applications telles que $f(\mathscr{D}_f) \subset \mathscr{D}_g$.

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b \\ \\ g(y) \underset{y\to b}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right. \Rightarrow g \circ f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell..$$

Remarques.

1. On peut se représenter la chose comme un passage à la limite dans la fonction g :

$$\lim_{x\to a} g \circ f(x) = \lim_{x\to a} g\left[f(x)\right] = g\left[\lim_{x\to a} f(x)\right] = g(b).$$

2. Ce résultat permet parfois de lever l'indétermination pour les fonctions dont l'expression fait intervenir des fonctions imbriquées (composition) les unes dans les autres.

Exemples.

1. $h : x \mapsto e^{-x+1}$ n'est pas une fonction de référence, mais n'est pas non plus une somme, ou un produit, ou un quotient, de fonctions de références. Nous étions pour l'instant impuissant à traiter cette situation.
Mais en notant $f : x \mapsto -x+1$ et $g : x \mapsto e^x$ nous remarquons que $h = g \circ f$ où g et f sont des fonctions de références (ou au moins des sommes, produits quotients de fonctions de référence).
Étudions la limite de h en $+\infty$.

$$\left\{\begin{array}{l} -x+1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \\ \\ e^y \underset{y\to-\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array}\right. \Rightarrow e^{-x+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$$\boxed{\lim_{+\infty} h = 0.}$$

Exercice 51. Déterminez les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2+3}$.

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \mathrm{e}^{1-0,5x}$.

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (5-x)^3$.

d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{(x^2+x+1)^4}$.

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{3x-2}$.

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2+x+\mathrm{e}^{-x}}$.

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x^2+x+1}$.

h) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \mathrm{e}^{\frac{2}{x}}$.

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} (2-3\mathrm{e}^{2x})^5$.

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x^2-1}{4x^2+1}}$.

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x\mathrm{e}^{3x}$.

l) $\lim\limits_{x\to+\infty} (2-x)\mathrm{e}^{2-x}$.

XII Théorème du point fixe.

Proposition 30. Soient $p \in \mathbb{N}$, $(u_n)_{n\geqslant p}$ une suite définie par une formule de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ quelque soit $n \geqslant p$, avec f une fonction admettant une limite en ℓ. Alors : $\ell = f(\ell)$.

Remarques.

1. Pour une suite définie par récurrence nous sommes maintenant capable de donner une équation vérifiée par la limite. Nous avons donc une méthode pour trouver cette limite.
2. Nous retiendrons que, pour peut que cela ait du sens (notamment qu'il y a effectivement des limites), il est possible de passer à la limite de la suite dans la fonction.
   Schématiquement : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right)$.

Exercice 52. Soient (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n où f est la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$.

1. Justifiez que (u_n) est bien définie.
2. Étudiez les variations de f sur $[1;+\infty[$.
3. Montrez que la suite (u_n) est convergente.
4. Déterminez la limite de (u_n).

Exercice 53. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n^2$.

1. Si (u_n) converge quelles sont les valeurs possibles de sa limite ℓ ?
2. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.
3. Étudiez le sens de variation de la suite (u_n).
4. Prouvez que (u_n) converge et précisez sa limite.

Exercice 54. On considère la suite définie par $u_{n+1} = u_n^2 - u_n - 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1$. Si la suite converge quelle peut être sa limite ?

Exercice 55. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x}$. On admet que f est strictement croissante sur $[0;1]$.

1. Montrez que pour tout $x \in [0;1]$, $f(x)$ appartient à $[0,1]$.
2. Soit D la droite d'équation $y = x$.
   (a) Montrez que $f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{\mathrm{e}^x - x}$ où $g(x)$ est à déterminer.
   (b) Du sens de variation de g déduire le signe de $g(x)$ sur $[0;1]$.
   (c) Déduisez-en la position relative de D et de la courbe $\mathscr{C}$ représentant f.
3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Donnez une représentation graphique de $\mathscr{C}$ et D puis dessinez les quatre premiers termes de la suite (u_n).

(b) Montrez que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ et $u_n \leqslant u_{n+1}$.

(c) Déduisez-en que (u_n) converge et précisez sa limite.

XIII Exercices.

Exercice 56. Soit f la fonction définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{4}\right\}$ par $f(x) = \frac{2x+3}{4x+3}$.

1. Déterminez les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Donnez-en une interprétation graphique.
2. Construisez le tableau de variation de f.

Exercice 57. On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 \geqslant -4$ et $u_{n+1} = \sqrt{4+u_n} - 2$ pour $n \geqslant 0$.

1. Montrez que u_n est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrez que, pour $n \geqslant 1$, on a $u_n \geqslant -2$.
3. Montrez que si la suite (u_n) a une limite finie, cette limite est zéro.
4. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - u_{n+1}$ a le même signe que u_n.
5. On suppose ici que $u_0 = 1$. Établissez que la suite (u_n) est monotone. A-t-elle une limite et si oui laquelle ?

Exercice 58. Soit la suite numérique (u_n) définie par $u_0 \in [0;1]$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$ pour tout entier naturel n.

1. Montrez que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
2. Montrez que (u_n) est croissante.
3. Déduisez-en quelle admet une limite que vous calculerez.
4. On pose $u_0 = \cos(\varphi)$ où $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Montrez par récurrence que $u_n = \cos\left(\frac{\varphi}{2^n}\right)$. Retrouvez les résultats du 3.

Exercice 59. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n}$.

1. Dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ tel que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm, dessinez la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = 5 - \frac{4}{x}$ et la droite Δ d'équation $y = x$. Vous préciserez les points communs à ces deux courbes.
2. Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Montrez par récurrence que u_n est bien définie pour tout n et vérifie $1 < u_n < 4$.
   (b) Montrez que la suite (u_n) est croissante.
   (c) Déduisez-en le comportement de la suite (u_n) pour n tendant vers $+\infty$ et calculez éventuellement sa limite.
3. Représentez les quatre premiers termes de la suite (u_n) dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ sur l'axe $\left(O;\vec{i}\right)$, à l'aide de $\mathscr{C}$ et de Δ.

Exercice 60. *Bac série C et E 1988. Besançon, Dijon, Lyon, Grenoble, Nancy-Metz, Reims, Strasbourg.* On se propose d'étudier la suite (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n}$ pour tout entier n de $\mathbb{N}$ puis la convergence de la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$, pour tout entier n.

1. (a) Montrez que pour tout entier n, u_n est positif.
   (b) Montrez que la suite (u_n) est décroissante.
   (c) Déduisez-en qu'elle converge et trouvez sa limite.

2. Montrez que pour tout entier n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{e}^{-S_n}$ et déduisez-en que S_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini.

Exercice 61. *Bac série C 1068. Pondichéry.* On considère l'application qui, au nombre réel x, fait correspondre le nombre réel $f(x) = \sqrt{x(x-3)^2}$. Étudiez la fonction f, construisez son graphe dans un repère orthonormé. Quelle particularité présente ce graphe au point d'abscisse 3 ?

XIV Corrections.

Exercice 47.

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} + 3 = 3$ donc $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 3$ en $+\infty$.
b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x + x^2} = 0$ donc $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.
c) $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^3 + \frac{-2}{x^2} = -\infty$ donc $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
d) $\lim_{x\to+\infty} x^{-2} + \frac{17}{\mathrm{e}^x} - 5 = -5$ donc $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.
e) $\lim_{x\to-\infty} -4\mathrm{e}^x + x^{-12} = 0$ donc $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.
f) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4}{3x^5+1} = 0$ donc $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.

Exercice 48. Si f de degré 3 alors il existe a, b, c et d des réels avec $a_{\neq}0$ tels que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Puisque $a \neq 0$: $f(x) = ax^3\left(1 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2} + \frac{d}{ax^3}\right)$. On procède à une disjonction des cas. Premier cas : si $a > 0$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} ax^3 = +\infty$. Deuxième cas : si $a < 0$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. De même en $-\infty$.

Exercice 49.

a) $\lim_{x\to+\infty} -2x^7 + 4x^3 + x = -\infty$. $\lim_{x\to-\infty} -2x^7 + 4x^3 + x = +\infty$.
b) $\lim_{x\to+\infty} x^3 + 4x^2 - x^4 = +\infty$. $\lim_{x\to-\infty} x^3 + 4x^2 - x^4 = -\infty$.
c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4-3x^3+x^2+x+1}{4x^3+2x+7} = +\infty$. $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4-3x^3+x^2+x+1}{4x^3+2x+7} = -\infty$.
d) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3+10x^2+x}{3^{12}+1} = 0$.
e) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{7x^{32}-13x^{17}+x+2}{-3x^{32}+x+\pi} = -\frac{7}{3}$.
f) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^5-x^3+x^6}{2x^4+x^4+x^7} = +\infty$. $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^5-x^3+x^6}{2x^4+x^4+x^7} = -\infty$.

Exercice 50.

a) $\lim_{x\to-\infty} 3x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x - 1 = -1$.
b) $\lim_{x\to-\infty} 1 - \mathrm{e}^2 x - x^3\mathrm{e}^x = +\infty$.
c) $\lim_{x\to+\infty} 2 - \frac{4\mathrm{e}^x}{x} = -\infty$.
d) $\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{\mathrm{e}^x}{2x^2} = +\infty$.
e) $\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{4\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}} = +\infty$.
f) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.
g) $\lim_{x\to+\infty} \frac{5x}{\mathrm{e}} = +\infty$.
h) $\lim_{x\to+\infty} \frac{5-3x}{\mathrm{e}^x} = 0$.
i) $\lim_{x\to+\infty} (5x-1)\mathrm{e}^x = +\infty$.
j) $\lim_{x\to+\infty} (x^2 + x + 3)\mathrm{e}^x = +\infty$.
k) $\lim_{x\to+\infty} 3x - \mathrm{e}^x = -\infty$.
l) $\lim_{x\to+\infty} 3x^2 - 2\mathrm{e}^x = -\infty$.
m) $\lim_{x\to+\infty} x^2 - x\mathrm{e}^x = -\infty$.
n) $\lim_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^x - x)\mathrm{e}^x = +\infty$.

Exercice 51.

a) $\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2+3} = +\infty$.
b) $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{1-0,5x} = 0$. $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{1-0,5x} = +\infty$.
c) $\lim_{x\to+\infty} (5-x)^3 = -\infty$. $\lim_{x\to-\infty} (5-x)^3 = +\infty$.
d) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{(x^2+x+1)^4} = 0$.
e) $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{3x-2} = 0$.
f) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2 + x + \mathrm{e}^{-x}} = +\infty$.
g) $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x^2+x+1} = 0$.
h) $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \mathrm{e}^{\frac{2}{x}} = +\infty$.
i) $\lim_{x\to-\infty} (2 - 3\mathrm{e}^{2x})^5 = 2$.
j) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2-1}{4x^2+1}} = \frac{1}{2}$.
k) $\lim_{x\to+\infty} 3x\mathrm{e}^{3x} = +\infty$.
l) $\lim_{x\to+\infty} (2-x)\mathrm{e}^{2-x} = 0$.

Exercice 52.

1. Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.
2. f est strictement croissante.
3. (u_n) est strictement décroissante et minorée par 1 donc convergente.
4. $\ell = \sqrt{1+\ell}$ donc $\ell^2 = 1 + \ell$. $\ell = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ donc $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 53.

1. $x = \frac{1}{4}x^2 \Leftrightarrow x \in \left\{0; \frac{1}{4}\right\}$.
2. $f : x \mapsto \frac{1}{4}x^2$ est croissante sur $[0;3]$ et $f(0) = 0$ et $f(3) = \frac{9}{4} \leqslant 3$.
3. f est croissante et $u_0 \geqslant u_1 = \frac{9}{4}$ donc décroissante.
4. Converge vers 0 car décroissante et $u_1 < 3$.

Exercice 54. $x = x^2 - x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1+\sqrt{6}; 1-\sqrt{6}\right\}$.

Exercice 55.

1. f est croissante sur $[0;1]$ donc si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$. Or $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ donc $f(x) \in [0;1]$.
2. (a) Soit $x \in [0;1]$.

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x} - x \\ &= \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x(\mathrm{e}^x - x)}{\mathrm{e}^x - x} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x\mathrm{e}^x + x^2}{\mathrm{e}^x - x} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x(1-x) + x^2 - 1}{\mathrm{e}^x - x} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x(1-x) + (x-1)(x+1)}{\mathrm{e}^x - x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in [0;1],\ f(x) - x = \frac{(1-x)(\mathrm{e}^x - x - 1)}{\mathrm{e}^x - x}.}$$

(b) $g'(x) = \mathrm{e}^x - 1 > 0$ donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sue $\mathbb{R}_+$.

On en déduit : $\forall x \in [0;1]$, $g(x) \geqslant g(0) = 0$.

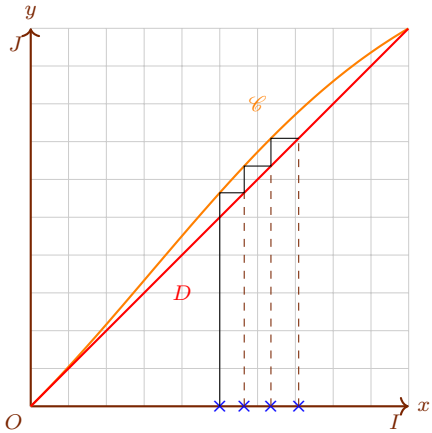
$$\boxed{g \geqslant 0 \text{ sur } [0;1].}$$

(c) $\mathrm{e}^x - x - 1 > 0$ (car, par convexité $\mathrm{e}^x > x + 1$, tangente en 0), $g(x) \geqslant 0$ et $1 - x > 0$ pour $x \in [0;1]$.

Ainsi $f(x) - x \geqslant 0$ pour tout $x \in [0;1]$.

$$\boxed{\mathscr{C} \text{ est au-dessus de } D.}$$

3. (a)



(b) Par récurrence. L'hérédité de $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ découle de la question 1. L'hérédité de $0 \leqslant u_{n+1}$ découle de f croissante.

(c) Théorème limite monotone.
Conjecture graphique : converge vers 1.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow f(x) - x = 0 \\ &\leftrightarrow 1 - x = 0 \text{ ou } g(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 0 \end{aligned}$$

Puisque $u_0 = \frac{1}{2}$ et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \frac{1}{2}$. par conséquent la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut être que 1.

Exercice 56.

1. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ donc $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = \frac{1}{2}$. $\lim_{\substack{x\to-\frac{3}{4}\\x>0}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x\to-\frac{3}{4}\\x>0}} f(x) = -\infty$ d'après le tableau de signes de f. Par conséquent $\mathscr{C}_f$ admet une tangente verticale d'équation $x = -\frac{4}{3}$.
2. $f'(x) = -\frac{6}{(4x+3)^2} < 0$.

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		$+\infty$
f'		$-$	‖	$-$	
f	$\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$

Exercice 57.

1. On montre par récurrence que $u_n \geqslant -4$.
2. $\sqrt{4+u_n} - 2 \geqslant -2$ car $\sqrt{4+u_n} \geqslant 0$.
3. $f : x \mapsto \sqrt{4+x} - 2$.
Supposons que (u_n) admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite. On a :
   (i) $\lim_{x\to\ell} f(x) = f(\ell)$,
   (ii) $lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$,

   donc, d'après le théorème du point fixe, $f(\ell) = \ell$. Ainsi : $\sqrt{4+\ell} - 2 = \ell$ donc $4 + \ell = \ell^2 + 4\ell + 4 \Leftrightarrow \ell^2 + 3\ell = 0 \Leftrightarrow \ell(\ell+3) = 0$. Comme $u_n \geqslant -2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\ell \geqslant -2$. La seule limite possible est 0.

4. $u_n - u_{n+1} = u_n - \sqrt{4+u_n} + 2 = u_n - \frac{u_n}{\sqrt{4+u_n}+2} = u_n\left(1 - \frac{1}{\sqrt{4+u_n}+2}\right)$. Comme $\sqrt{4+u_n} + 2 \geqslant 2$, $1 - \frac{1}{\sqrt{4+u_n}+2} \geqslant \frac{1}{2}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - u_{n+1}$ a le même signe que u_n.
5. On montre par récurrence que la suite est croissante. Comme $u_0 = 1$ et que la suite est croissante elle ne peut pas avoir 0 pour limite. Comme la suite est croissante mais pas convergente : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 58.

1. Démonstration par récurrence. On a : $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$. Si $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ alors, $x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{2}}$ étant strictement croissante, alors $\sqrt{\frac{1+0}{2}} \leqslant \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \leqslant \sqrt{\frac{1+1}{2}}$.
2. $u_{n+1} - u_n = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} - u_n = \frac{\frac{1+u_n}{2} - u_n^2}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + u_n} = \frac{1}{2}\frac{1+u_n-2u_n^2}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+u_n}$. Racines évidente du trinôme au numérateur 1 et $-\frac{1}{2}$. Or $u_n \in [0;1]$ donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. La suite est croissante. La démonstration par récurrence ne simplifie pas le problème car nous n'avons pas d'autre moyen pour comparer u_0 et u_1 que de tenir u semblable raisonnement.
3. On a :

   (i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 1$ donc (u_n) est majorée par 1,
   (ii) (u_n) est croissante,

   donc, d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers un réel ℓ tel que $\ell \leqslant 1$ (et même $0 \leqslant \ell \leqslant 1$).
   On a :

   (i) $f : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{2}}$ admet des limites en a quelque soit $a \in \mathbb{R}_+$,
   (ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$,

   donc, d'après te théorème du point fixe, $f(\ell) = \ell$ donc $-2\ell^2 + \ell + 1 = 0$ *i.e.* $\ell \in \left\{1, -\frac{1}{2}\right\}$ et enfin $\ell = 1$.
4. Initialisation donnée dans l'énoncé. Si $u_n = \cos\left(\frac{\varphi}{2^n}\right)$ alors $\cos\left(\frac{1}{2} \times \frac{\varphi}{2^n}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\varphi}{2^n}\right)}{2}} = u_{n+1}$ pose $u_0 = \cos(\varphi)$ où $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   On a :

   (i) $\lim_{\substack{x\to+\infty \\ x>0}} \cos(x) = 1$,
   (ii) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\varphi}{2^n} = 0$ d'après le théorème des gendarmes car $2 > 1$,

   donc, par composition des limites, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

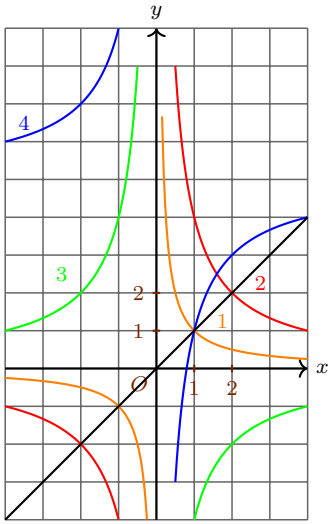
Exercice 59.

1. On obtient le tracé de la courbe en transformant une hyperbole équilatère représentant $x \mapsto \frac{1}{x}$:

   (i) par une homothétie de centre l'origine et de rapport 4,

   (ii) puis par un symétrie d'axe l'axe des abscisses,

   (iii) enfin par une translation de vecteur $5\vec{j}$.



Par lecture graphique on conjecture que les points communs ont pour coordonnées (1,1) et (4; 4).

2. (a) En montrant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n < 4$ on établi que la suite est bien définie car alors $u_n \neq 0$. $1 < u_0 = 2 < 4$. Si $1 < u_n < 4$ alors, f étant strictement croissante sur $]1;4[$, $f(1) < f(u_n) < f(4)$ et $f(1) = 1$ et $f(4) = 4$.
   (b) $u_{n+1} - u_n = 5 - \frac{4}{u_n} - u_n = \frac{-u_n^2+5u_n-4}{u_n^2}$ et $-x^2 + 5x - 4 \geqslant 0$ sur $]1;4[$ donc (u_n) est croissante.
   (c) On a :
      (i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 4$ donc (u_n) est majorée par 4,
      (ii) (u_n) est croissante,

      donc, d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers un réel ℓ et $\ell \leqslant 4$.
      On a :
      (i) f admet une limite (réelle) en a pour tout $a \in]1;4[$,
      (ii) $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \in]1;4[$,

      donc, par composition de limites, $5 - \frac{4}{\ell} = \ell$. Ainsi $\ell \in \{1;4\}$.
      Comme :
      (i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]1;4[$,
      (ii) (u_n) est croissante,

      nécessairement $\ell = 4$.
3. On construit les points à la règle un par un.

Exercice 60.

1. (a) Par récurrence sur n en utilisant la positivité de la fonction exponentielle.
   (b) $u_{n+1} - u_n = u_n\left(\mathrm{e}^{-u_n} - 1\right)$. Or $u_n \geqslant 0$ donc $\mathrm{e}^{-u_n} - 1 \geqslant 0$. Puis par récurrence (u_n) est décroissante.
   (c) Théorème de la limite monotone. Puis théorème du point fixe : $\ell = \ell\mathrm{e}^{-\ell} \Leftrightarrow \ell = 0$.
2. Démonstration par récurrence. $u_{n+1} = u_n\mathrm{e}^{-u_n} = \mathrm{e}^{-S_{n-1}}\mathrm{e}^{-u_n} = \mathrm{e}^{-u_n-S_{n-1}} = \mathrm{e}^{-S_n}$. $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $u_{n+1} = \mathrm{e}^{-S_n}$ donc par unicité de la limite $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-S_n} = 0$. De $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-S_n} = 0$ et $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$ on déduit par composition $\lim_{n\to+\infty} -S_n = -\infty$ et enfin S_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini.

Exercice 61.

* $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+$ donc pas de parité.
* $\lim_{x\to+\infty} x(x-3)^2 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc par composition $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

* f est dérivable sur $]0;3[\cup]3,+\infty[$. $x(x-3)^2 = x(x^2-6x+9) = x^3-6X^2+9x$ donc $f'(x) = \frac{3x^2-12x+9}{2\sqrt{x(x-3)^2}} = \frac{3}{2} \times \frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x(x-3)^2}}$. 1 et 3 racines évidentes d numérateur donc strictement croissante sur $]0;1]$, strictement décroissante sur $[1;3[$ et strictement décroissante sur $]3,+\infty[$. Point de rebroussement (avec des demi-tangentes horizontales).

5. Continuité.

Nous avons déjà vu que, par exemple, $\lim_{x\to 3} -4x+1 = -11$ autrement dit en notant $f(x) = -4x+1$ nous avons $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$. Quel différence entre limite et image pa la fonction ? à quoi bon les distinguer ? En donnant une interprétation géométrique de cette égalité nous allons voir apparaître d'importants résultats.

I Un exemple.

Nous avons passé, pour l'instant sous silence la limite d'une fonction en dehors des bornes ouvertes du domaine de définition. Le plus souvent (avec les fonctions de référence) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ si a est intérieur au domaine de définition de f. Ce n'est pas toujours aussi simple.

Considérons la fonction f affine par morceaux définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 2x+1 \text{ si } x < 2 \\ -3x+10 \text{ si } x \geqslant 2 \end{cases}$.

- $f(-1)$ se calcule avec la première formule car $-1 < 2$ et donc $(-1) = 2\times(-1)+1 = -1$
- $f(4) = -3\times 4+10 = -2$.
- $f(2) = -3\times 2+10 = 4$ car l'inégalité large indique qu'il faut utiliser la seconde formule.

Recherchons la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 2. Pour trouver la limite il faut considérer un voisinage ouvert de 2 mais suivant qu'on est à droite ou gauche de 2 dans ce voisinage ce n'est pas la même formule qui défini f. On peut regarder les limites par valeurs inférieures et supérieures : $\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} 2x+1 = 5$ et $\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} -3x+10 = 4$.

Nous voyons que nous n'obtenons pas les mêmes valeurs à droite et à gauche et donc qu'il n'y a pas de limite de f en a.

Une dernière remarque : sur une représentation graphique nous voyons que le point d'abscisse 2 est un point de discontinuité de $\mathscr{C}_f$: le tracé se fait avec deux lignes séparées.

II Définition.

Définition 15. Soient I un intervalle ouvert, f une application sur I, $a \in I$. Une application f est dite *continue en* $a \in \mathscr{D}$ si et seulement si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Remarques.

1. Nous dirons que *f est continue sur $\mathscr{D}$* si et seulement si f est continue en tout point de $\mathscr{D}$.
2. Cette définition ne permet pas de définir la continuité en a lorsque $\mathscr{D} = [a,b]$.
3. Graphiquement une fonction est continue sur un intervalle si sa courbe représentative peut être tracée sans lever le stylo.
4. Comme la dérivation ou la croissance, la continuité est une propriété locale : il faut regarder ce qui se passe au voisinage d'un point.

5. Une fonction sera dite *discontinue* si et seulement si elle n'est pas continue.

Proposition 31. Soit I un intervalle ouvert, $a \in I$, f une application sur I. f est continue en a si et seulement si f admet des limites réelles à droite et à gauche en a égales à $f(a)$.

Démonstration.

* Supposons f continue en a.
  Soient α et β des réels tels que $\alpha < a < \beta$.
  Puisque $]\alpha,\beta[$ est un voisinage ouvert de a et que f est continue en a, il existe un voisinage ouvert I de a tel que : $\forall x \in I,\ f(x) \in]\alpha,\beta[$.
  Donc : $\forall x \in I \cap]-\infty,a[,\ f(x) \in]\alpha,\beta[$.
  Autrement dit $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$.
  De même $\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$.
* Réciproquement, supposons que f admet en a des limites à droite et à gauche égales à $f(a)$.
  Soient α et β des réels tels que $\alpha < a < \beta$.
  Puisque $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$, il existe un voisinage ouvert I_d de a tel que : $\forall x \in I_d \cap]a, +\infty[,\ f(x) \in]\alpha,\beta[$.
  De même de $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$, nous déduisons l' existence d'un voisinage ouvert I_g de a tel que : $\forall x \in I_g \cap]-\infty,a[,\ f(x) \in]\alpha,\beta[$.
  $I_d \cap I_g$ est un voisinage ouvert de a et : $\forall x \in I_g \cap I_d,\ f(x) \in]\alpha,\beta[$.

Remarques.

1. Ce résultat permet si nécessaire (deux formules comme dans l'exemple introductif) de montrer une limite.
2. Nous en déduisons par contraposition que : si f n'admet pas de limite à droite ou à gauche en a alors f n'est pas continue en a. C'est une méthode à retenir pour montrer qu'une fonction n'est pas continue en un point.
3. Nous dirons, si f est définie sur $[a,b]$, que f est continue en a la limite de f en par valeurs supérieures est égale à $f(a)$ (et tant pis pour la limite à gauche).

Exemples.

1. Les fonctions affines sont continues sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction partie entière n'est continue en aucun point de $\mathbb{Z}$.

III Les fonctions continues de références.

Les fonctions de référence que vous connaissez sont toutes continues. Pensez à leurs courbes représentatives qui sont d'un seul tenant.

IV Des procédés pour construire des fonctions continues à partir d'autres fonctions continues.

Comme pour les fonction dérivées, pour obtenir de nouvelles fonctions continues à partir des fonctions de référence on peut les additionner, les multiplier, les inverser, faire des combinaisons linéaire, les composées afin d'obtenir de nouvelles fonctions continues.

V Une condition suffisante de continuité.

Proposition 32. Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

VI Théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 1. Soient a et b des réels avec $a < b$, f une fonction définie et continue sur $[a,b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$.

Remarques.

1. Si f est continue sur le segment $[a,b]$ alors f atteint toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.
2. Si f est continue sur $[a,b]$ alors f est bornée et atteint ses bornes.
3. L'image continue d'un intervalle I est un intervalle noté $f(I)$. De plus l'image continue d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné.

Exemples.

1. Montrons que l'équation $x^4 = 5$ admet une solution.
   Notons $f : x \mapsto x^4$.
   On a :

   (i) $f(1) = 1$ et $f(2) = 16$ donc $f(1) < 5 < f(5)$,
   (ii) f est continue sur $[1;2]$,

   donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [1;2]$ tel que $f(c) = 5$.

Exercice 62. Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 8}{x^2 + 1}$ une fonction définie sur $[0;1]$.

1. Calculez $f(0)$ et $f(1)$.
2. Justifiez que l'équation $f(x) = -5$ admet au moins une solution dans $[0;1]$.
3. Les plus braves déterminerons l'ensemble des antécédents de -5.

Exercice 63. Démontrez que l'équation $\sqrt{x} + \mathrm{e}^x - 2 = 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

VII Théorème des valeurs intermédiaires avec des fonctions strictement monotones.

Les différentes images continues d'intervalles.

Soit f une fonction continue et monotone sur un intervalle I. a et b sont dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ suivant les cas.

I	Croissante sur I, alors $f(I)=$	Décroissante sur I, alors $f(I)=$
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$
$[a,b[$	$\left[f(a),\lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b} f(x),f(a)\right]$
$]a,b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a} f(x),f(b)\right]$	$\left[f(b),\lim\limits_{x\to a} f(x)\right[$
$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a} f(x),\lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b} f(x),\lim\limits_{x\to a} f(x)\right[$

Exercice 64. Déterminez $f(]2;+\infty[)$ lorsque $f : x \mapsto \exp\left(\dfrac{1}{x^2-4}\right)$.

Proposition 33. Soient a et b des réels avec $a < b$, f une fonction définie sur $[a,b]$. Si f continue est strictement monotone sur $[a,b]$ alors pour tout k entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un unique $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$.

Remarques.

1. L'usage est de nommer ce résultat « corollaire du théorème des valeurs intermédiaires » au lycée.
2. Pour $k = 0$ alors il suffit de s'assurer que la fonction est continue, strictement monotone et que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires pour affirmer l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = 0$. Pour montrer que que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraire il suffit de vérifier que $f(a)f(b) < 0$.
3. On peut étendre le corollaire en travaillant avec des intervalles semi-ouverts ou ouverts $(]a,b]$, $[a,b[$, $]a,b[)$ a et b étant pris dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Dans ce cas on considère $\lim_a f$ et $\lim_b f$ à la place de $f(a)$ et $f(b)$. *Confer supra.*

Exemples.

1. Montrons que l'équation $x^2 = 13$ admet une unique solution dans $[0;8]$.
   Notons $f : x \mapsto x^2$. On a :
   (i) $f(0) = 0$ et $f(8) = 64$ donc $f(0) < 13 < f(8)$,
   (ii) f est continue sur $[0;8]$,
   (iii) f est strictement croissante sur $[0;8]$,
   donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $c \in [0;8]$ tel que $f(c) = 13$.

Exercice 65. Soit $f : x \mapsto x^3 - 6x + 1$ une fonction définie sur $[-2;+\infty[$.

1. Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution.
2. Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[2;+\infty[$.

Exercice 66. Soit $f : x \mapsto x^3 - 8x + 1$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-1;1]$.

Exercice 67. Soit $f : x \mapsto 4x^5 + 2x - 2$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrez que l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution que nous noterons α.
2. Déterminez un encadrement de α à 10^{-2}.

Exercice 68. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1.$$

1. Étudiez les variations de g.
2. Montrez que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α. Donnez un encadrement de α à 0,1 près.
3. Déterminez le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1-x}{x^3+1}.$$

   (a) Calculez $f'(x)$ puis exprimez $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.
   (b) Déduisez-en le signe de $f'(x)$ puis les variations de f sur $]-1,+\infty[$.

Exercice 69. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$.

1. Étudiez les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminez le nombre de solutions dans $\mathbb{R}_+$ de l'équation $f(x) = 2$.

Exercice 70. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 + 3x^2 - 5x + 1$.

1. Calculez pour tout réel x, $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Déterminez le signe de $f''(x)$ puis dressez le tableau de variation de f'.
3. (a) Montrez que l'équation $f'(x) = 0$ possède une unique solution α sur $\mathbb{R}$ donc on donnera en encadrement à 0,1 près.
   (b) Déduisez-en le signe de f' sur $\mathbb{R}$.
   (c) Dressez le tableau de variation de f.

Exercice 71. On veut résoudre dans $[0,\pi]$ l'équation : $3x - 2\cos(x) - 2 = 0$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0,\pi]$ par : $f(x) = 3x - 2\cos(x) - 2$. Étudiez les variations de f.
2. Démontrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0,\pi]$. Donner à la calculatrice un encadrement à 0,1 près de α.

VIII Exercices.

Exercice 72. On note : $P_1(x) = 1 + x$, $P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$, $P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$.

1. Étudiez le sens de variation des trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par P_1, P_2 et P_3 et tracez leurs courbes représentatives $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ sur un même graphique. On précisera les positions relatives de ces trois courbes ainsi que leur points d'intersections deux à deux.

On se propose de calculer la racine de l'équation $P_3(x) = 0$.

2. On note r cette racine. Montrez que r existe et est unique. Donnez un encadrement de r d'une longueur égale à 10^{-2}.
3. Montrez que si $t = -r$, alors t vérifie la relation : $t = 3\frac{2+t^2}{6+t^2}$.
4. Étudiez la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = \frac{3(2+x^2)}{6+x^2}$. Tracez sa courbe représentative sur $[0;3]$. Cherchez le maximum de la dérivée φ' de φ lorsque x est positif.

5. Pour calculer une valeur approchée de t on construit la suite : $u_0 = 1{,}59$ et $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculez $u_{n+1} - t$ en fonction de u_n et de t.
   (b) Montrez que : $u_n - t$ est de signe constant, u_n appartient à l'intervalle $[1; 1{,}6]$, $|u_{n+1} - t| < \frac{12}{7\times 8{,}5}|u_n^2 - t^2| < \frac{12\times 3{,}2}{7\times 8{,}5}|u_n - t|$, $|u_{n+1} - t| < \frac{12}{8{,}5^2}|u_n^2 - t^2| < 0{,}532|u_n - t|$. Déduisez-en que la suite (u_n) converge vers t.

Exercice 73. *Bac série C 1968. Mexico.* En étudiant les variations de la fonction y définie par $y(x) = \frac{x-1}{x+1} - \mathrm{e}^{-2x}$ (dont on ne construira pas le graphe), montrez que, dans l'ensemble des nombres réels positifs, l'équation $(x-1)\mathrm{e}^{x} - (x+1)\mathrm{e}^{-x} = 0$ admet une racine réelle et une seule.

Exercice 74. *Bac 1976 Série C remplacement Clermont-Ferrand.* Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = \ln(x^2 - 1) + \frac{1}{x^2-1}$.

1. Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(x^2 - 1) = \ln(x+1) + \ln(x-1)$. Même question pour l'équation $\ln(x^2 - 1) = 2\ln(x) + \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$. Calculez $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2-1)}{x}$.
2. Étudiez les variations de f et représentez-la graphiquement.

Exercice 75. *Bac C 1988. Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Nantes, Orléans-Tours, Poitiers, Rennes.* Le but du problème est d'étudier la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x}\left(x^2 + 1 - \ln(x)\right)$ et de construire sa courbe représentative $\mathscr{C}$, ce qui fait l'objet de la partie I, puis de décrire un procédé d'approximation du nombre α pour lequel f atteint son minimum, ce qui fait l'objet de la partie II.

I Étude de f et construction de $\mathscr{C}$.

1. Étude d'une fonction auxiliaire.
   Soit g la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x^2 + \ln(x) - 2$.
   (a) Étudiez le sens de variation de g et ses limites en 0 et $+\infty$. (On ne demande pas la représentation graphique de g.)
   (b) Déduisez-en que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule et que : $1{,}30 \leqslant \alpha \leqslant 1{,}35$.
   (c) Étudiez le signe de $g(x)$.
2. Étude de f.
   (a) Étudiez les limites de f en 0 et $+\infty$.
   (b) Exprimez f' à l'aide de $g(x)$. Déduisez-en le sens de variation de f.
3. Construction de la courbe $\mathscr{C}$.
   Le plan est rapport au repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On choisit pour unité graphique 2 cm.
   (a) Montrez que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe $\mathscr{C}$.
   (b) Déterminez le point d'intersection B de $\mathscr{C}$ et de Δ ; précisez la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.
   (c) Construisez la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ, en précisant la tangente en B à $\mathscr{C}$.
4. *Question nécessitant les intégrales.* Calcul d'une aire.
   Pour tout nombre réel $t \geqslant \mathrm{e}$ calculez l'aire $A(t)$ de la portion de plan comprise entre $\mathscr{C}$ et Δ et les droites d'équations $x = \mathrm{e}$ et $x = t$.

II Approximation de α.

1. (a) Montrez que l'équation $g(x) = 0$ est équivalente à l'équation $h(x) = x$, où h est la fonction définie sur $I = [1{,}30; 1{,}35]$ par : $h(x) = \sqrt{2 - \ln(x)}$.

(b) Justifiez la décroissance de h sur I et montrez, à l'aide de la calculatrice, que pour tout élément x de I, $h(x)$ appartient à I.
(c) Prouvez que, pour tout élément x de I : $-\frac{1}{3} \leqslant h'(x) \leqslant 0$.
(d) *Utilise l'inégalité des accroissements finis.* Déduisez-en que pour tout élément x de I : $|h(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{3}|x - \alpha|$.

2. Soit (u_n) la suite d'éléments de I définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = h(u_n)$ et la condition initiale $u_0 = 1{,}30$.
(a) Montrez que pour tout entier n : $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{3}|u_n - \alpha|$.
(b) Déduisez-en que pour tout entier n : $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{5}{100}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
(c) Déterminez la limite de la suite (u_n).
(d) Précisez un entier n_0 tel que $|u_{n_0} - \alpha| \leqslant 10^{-6}$ et donnez la valeur de u_{n_0}.

IX Corrections.

Exercice 62.

1. $f(0) = -8$ et $f(1) = -\frac{7}{2}$.
2. On a :
(i) $f(-8) < -5 < f(1)$ d'après la question précédente,
(ii) f est continue en tant que fraction rationnelle,
donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0;1]$ tel que $f(c) = -5$.
3. $\frac{x^2-8}{x^2+1} = -5 \Leftrightarrow x^2 - 8 = -5x^2 - 5 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. Ainsi le seul antécédent de -5 par f (sur $[0;1]$) est $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 63. Notons : $x \mapsto \sqrt{x} + \mathrm{e}^x - 2$. On a :

(i) $f(0) = -1$ et $f(1) = \mathrm{e} - 1$ donc $f(0) < 1 < f(1)$,
(ii) f est continue sur $[0;1]$

donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0;1]$ tel que $f(c) = 1$.

Exercice 64. f est dérivable sur $]2, +\infty[$ (donc continue) et $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-4)^2}\mathrm{e}^{1/(x^2-4)} < 0$. f est décroissante. $\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Enfin : $f(]2, +\infty[) =]0, +\infty[$.

Exercice 65.

1. • f est polynomiale donc continue sur $[-2, +\infty[$,
• $f(-2) = 9$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{8}$ donc $0 \in f([-2, +\infty[)$,
par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

$$\boxed{\exists \alpha \in [-2, +\infty[,\ f(\alpha) = 0.}$$

2. • f est polynomiale donc continue sur $[2, +\infty[$;
• $f'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$, la fonction polynomiale de degré deux f' est du signe de son coefficient dominant $3 > 0$ sur $]\sqrt{2}, +\infty[$ et ainsi f est strictement croissante sur $[2, +\infty[$;
• $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $f([2, +\infty[) = [-4, +\infty[$ et on a bien $0 \in [-4, +\infty[$;
par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

$$\boxed{\exists! \beta \in [2, +\infty[,\ f(\beta) = 0.}$$

Exercice 66.

(i) $f(-1) = 8$ et $f(1) = -6$ donc $f(1) < 0 < f(-1)$,

(ii) f est continue car polynomiale,

(iii) $f'(x) = 3x^2 - 8 = 3\left(x - \sqrt{\frac{8}{3}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{8}{3}}\right)$ et $\sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{6} > 2$ car $\sqrt{4} < \sqrt{6} < \sqrt{9}$ donc f est strictement décroissante sur $[-1; 1]$,

donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $c \in [-1; 1]$ tel que $f(c) = 0$.

Exercice 67.

1. (i) $f'(x) = 20x^4 + 2 > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
   (ii) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc $8 \in f(\mathbb{R})$,
   (iii) f est une fonction polynomiale donc continue,
   donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 8$.
2.

```python
def valeurapprochee(epsilon):
a=0
b=2
while b-a>=epsilon:
if 4*((a+b)/2)**5+2*((a+b)/2)-2>8:
b=(a+b)/2
else:
a=(a+b)/2
return [a,b]
```

   En choisissant *epsilon* = 0.02 on obtient [1.1328125, 1.140625] d'où l'encadrement : $1{,}131 \leqslant \alpha \leqslant 1{,}141$.

Exercice 68.

1. $g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$6x$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

2. Sur $]-\infty, 1[$ admet un maximum local égale à -1.
   g est continue sur $]1, +\infty[$ et strictement croissante donc $f(]1, +\infty[) =]-2, +\infty[$.
   Comme $0 \in]-2, +\infty[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in]1, +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
   Enfin α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$.
3.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
g		$-$	0	$+$	

4. (a) $f'(x) = \frac{-1\times(x^3+1)-(1-x)\times 3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{2x^3-3x^2-1}{(x^3+1)^2} = \frac{g(x)}{(x^3+1)^2}$.

(b)

x	-1		α		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0

Exercice 69.

1. Étudions les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
   * f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
   * Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $f'(x) = 3 \times 2x^2 - 2 \times \frac{5}{2}x - 1 = 6x^2 - 5x - 1$.
   * 1 est racine évidente du trinôme $6x^2 - 5x - 1$ donc la seconde racine est $-\frac{1}{6}$.
     Enfin le trinôme est du signe de son coefficient dominant (ici 6) sauf entre les racines.
   * Soit $x \in \mathbb{R}_+$ avec $x > 1$.
     $f(x) = x^3\left(2 - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^3}\right)$.
     Or d'une part, par somme : $\lim_{x\to+\infty} 2 - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^3} = 2$ et d'autre part $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ donc, par produit : $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2. * D'après le tableau de variation f admet un maximum égale à $\frac{1}{2}$ qui est atteint en 0. Nous en déduisons que $f(x) = 2$ n'a pas de solution sur $[0; 1]$.
   * f est continue sur $[1, +\infty[$ (car polynomiale).
     f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
     $f([1, +\infty[) = [f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x)[= [-1, +\infty[$.
     Comme $2 \in [-1, +\infty[$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $[1, +\infty[$.

$f(x) = 2$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 70.

1. f est polynomiale donc indéfiniment dérivable et, pour $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 4x^3 + 6x - 5$ puis $f''(x) = 12x^2 + 6$.
2. * $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$.
   * Clairement $f'' \geqslant 6 > 0$ donc f' est strictement croissante.

x	$-\infty$		$+\infty$
f''		$+$	
f'	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. (a) f est continue sur $\mathbb{R}$ (car polynomiale),
f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
$f(\mathbb{R}) =]\lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f[= \mathbb{R}$,
donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f'(\alpha) = 0$.
Avec la calculatrice : $0{,}6 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}7$.
(b) De la question précédente nous déduisons

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	

4. $\lim_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim_{-\infty} = +\infty$ donc

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 71.

1. $f'(x) = 3 + 2\sin(x) \geqslant 1$. f est donc strictement croissante sur $[0;\pi]$.
2. (i) f est strictement croissante sur $[0;\pi]$,
(ii) $f(0) = -4$ et $f(\pi) = 3\pi$ donc $f(0) < 0 < f(\pi)$,
(iii) f est une est une combinaison linéaire de fonctions continues donc est continue,
donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in [0,\pi]$ tel que $f(\alpha) = 8$.

```
import math
def valeurapprochee(epsilon):
a=0
b=math.pi
while b-a>=epsilon:
if 3*((a+b)/2)-2*math.cos((a+b)/2)-2>0:
b=(a+b)/2
else:
a=(a+b)/2
return [a,b]
```

Avec *epsilon* = 0.01 on obtient [1.0124273200045233,1.0185632431560658] donc $1 < \alpha < 1{,}1$.

X Exercices.

Exercice 72.

1. P_1 est une fonction affine strictement croissante. $P_2(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{2}$ donc strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$ et strictement croissante sur $[-1,+\infty[$. $P_3'(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ son discriminant est $1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ donc P_3' est strictement positif comme sont coefficient dominant et donc P_3 est strictement croissante.
2. (i) P_3 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
(ii) $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$,
(iii) f est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale,
donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $r \in \mathbb{R}$ tel que $P_3(r) = 0$.

```
def valeurapprochee(min,max,epsilon):
while max-min>=epsilon:
if 1/6*((min+max)/2)**3+1/2*((min+max)/2)**2+(min+max)/2+1>0:
max=(min+max)/2
else:
min=(min+max)/2
return [min,max]
```

valeurapprochee(-1000,1000,0.001) renvoie [-1.5964508056640625, -1.5954971313476562] donc $-1{,}6 < r < -1{,}59$.

3. Supposons $t = -r$. r racine de P_3 donc $t = 3\frac{2+t^2}{6+t^2}$. $\frac{1}{6}r^3 + \frac{1}{2}r^2 + r + 1 = 0 \Leftrightarrow r^3 + 3r^2 + 6r + 6 = 0 \Leftrightarrow 3r^2 + 6 = -r^3 - 6r \Leftrightarrow 3(-r)^2 + 6 = (-r)^3 + 6(-r) \Leftrightarrow 3(r+2) = t^3 + 6t \Leftrightarrow 3(r+t) = t(t^2+6) \Leftrightarrow t = 3\frac{2+t^2}{6+t^2}$.
4. φ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. φ est paire. $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 3$ donc asymptote horizontale d'équation $y = 3$. $\varphi'(x) = 3\frac{2x(6+x^2)-(2+x^2)2x}{(6+x^2)^2} = 3\frac{8x}{(6+x^2)^2}$ est du signe de x donc φ est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.
$\varphi''(x) = 24\frac{(6+x^2)^2-x2(2x)(6+x^2)}{(6+x^2)^4} = 24\frac{6+x^2-4x^2}{(6+x^2)^3} = 24\frac{-3x^2+6}{(6+x^2)^3}$ donc φ admet sur $\mathbb{R}_+$ un maximum en $\sqrt{2}$ égale à $\frac{3}{8}\sqrt{2}$.
5. (a) $u_{n+1} - t = \varphi(u_n) - \varphi(t)$ en fonction de u_n et de t.
   (b) * $u_n - t < 0$. Initialisation : $-t < -1{,}59$ donc $u_0 - t < u_0 - ,1{,}59 = 0$. Si $u_n - t < 0$ alors, φ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, $\varphi(u_n) < \varphi(t)$.
   * Là encore récurrence utilisant la croissance de φ.
   * $1 \leqslant u_n \leqslant 1{,}6$ et $t \geqslant 1{,}5$ donc.
   * $|u_{n+1}-t| < 0{,}532^n|u_0-t|$ $\lim_{n\to+\infty} 0{,}53^n|u_0t| = 0$. D'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n\to+\infty} u_n - t = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = t$.

Exercice 73. y est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et dérivable sur ce même ensemble. Pas de parité ou de périodicité. $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 1$. $\lim_{x\to-\infty} y(x) = -\infty$. $\lim_{\substack{x\to-1\\x>1}} y(x) = -\infty$. $\lim_{\substack{x\to-1\\x<1}} y(x) = +\infty$. $y'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} + 2e^{-2x} > 0$ donc y est strictement croissante puis application du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 74.

1. $\ln(x^2-1) = \ln(x+1)+\ln(x-1)$ n'a de sens que pour $x \in (]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[) \cap]-1,+\infty[\cap]1,+\infty[=]1,+\infty[$. De plus pour $x \in]1,+\infty[$, $\ln(x^1-1) = \ln[(x-1)(x+1)] = \ln(x-1)+\ln(x+1)$. $\ln(x^2-1) = 2\ln(x = +\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$ n'a de sens que pour $x \in]0,+\infty[\cap(]1,+\infty[\cup]-\infty,0[) =$. De plus pour $x \in]1,+\infty[$, $\ln(x^2-1) = \ln\left(x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right) = 2\ln(x) + \ln\left(1-\frac{1}{x}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. Ainsi $\ln(x^2-1) = \ln\left(x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right) = 2\ln(x) + \ln\left(1-\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$.
   Calculez $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2-1)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2\ln(x) + \ln\left(1-\frac{1}{x}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = +\infty$.
2. f est définie sur $\mathbb{R}\setminus[1,+\infty[$. f est paire. $f'(x) = \frac{2x}{x^2-1} - \frac{2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x}{x^2-1}\left(1-\frac{1}{x^2-1}\right) = \frac{2x(x^2-2)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x^2-1)^2}$.
   $\lim_{X\to0^+} \frac{1}{X}(X\ln(X)+1) = +\infty$ donc pa composition : $\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$				$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$		$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Pour la représentation graphique utilisation de la convexité : f est convexe sur $]-\infty,-\sqrt{2}]$ et sur $]1,\sqrt{2}]$ et concave sur $[-\sqrt{2},-1[$ et $\sqrt{2},+\infty[$, les points d'inflexion ayant pour abscisse $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

Exercice 75. *I* **Étude de f et construction de $\mathscr{C}$.**

1. (a) g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. $g'(x) = 2x+\frac{1}{x} = \frac{2x^2+1}{x} > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc g est strictement croissante.
   $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = -\infty$.
   (b) (i) g est continue car combinaisons linéaire de fonctions continues,
   (ii) g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$,
   (iii) $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = -\infty$ donc $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$,
   donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(\alpha) = 0$.
   $f(1{,}30) < 0 < f(1{,}35)$ donc $1{,}31 \leqslant \alpha \leqslant 1{,}35$.
2. (a) Par produit : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. $f(x) = x + \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x}$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   (b) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}(x^2+1-\ln(x)) + \frac{1}{x}\left(2x-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}\left(-x^2-1+\ln(x)+2x^2-1\right) = \frac{g(x)}{x^2}$.
3. (a) $f(x) - x = \frac{1}{x}(1-\ln(x))$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$ et ainsi la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe $\mathscr{C}$.
   (b) $f(x) = x \iff 1 = \ln(x) \iff x = \mathrm{e}$. $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$. $B(\mathrm{e},\mathrm{e})$. $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ sur $]0;1]$ et au-dessous sinon.
   (c) Tangente en B : $y = f'(\mathrm{e})(x-\ ) + f(\mathrm{e})$ *i.e.* $y = (1-\mathrm{e}^{-2})x + 2\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}$.
4. $\int_{\mathrm{e}}^{t} f(x) - x \,\mathrm{d}x = \int_{\mathrm{e}}^{t} \frac{1-\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}(1-\ln(x))^2\right]_{\mathrm{e}}^{t} = -\frac{1}{2}(1-\ln(t))^2$.

II **Approximation de α.**

1. (a) $g(x) = 0 \iff x^2 + ln(x) - 2 = 0 \iff x^2 = 2 - \ln(x) \iff x = \sqrt{x - \ln(x)}$ car $x \geqslant 0$ et $2 - \ln(x) \geqslant 0$.
   (b) ln est croissante donc $x \mapsto 2 - \ln(x)$ est décroissante. Comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante par composition $x \mapsto \sqrt{2-\ln(x)}$ est décroissante.
   Si $1{,}30 \leqslant x \leqslant 1{,}35$ alors, h étant décroissante, $h(1{,}30) \geqslant h(x) \geqslant h(1{,}35)$. Avec la calculatrice : $h(1{,}30) \approx 1{,}3181941190630873 < 1{,}35$ et $h(1{,}35) \approx 1{,}3038003710498252 > 1{,}30$ donc $h(x) \in I$.
   (c) $h'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{2\sqrt{2-\ln(x)}} = -\frac{1}{2x\sqrt{2-\ln(x)}}$. Si $1{,}3 \leqslant x \leqslant 1{,}35$ alors, $\begin{cases} 2{,}6 \leqslant 2x \leqslant 2{,}7 \\ 1{,}3 \leqslant h(x) \leqslant 1{,}35 \end{cases}$ donc $2{,}6\times 1{,}3 \leqslant 2xh(x) \leqslant 2{,}7\times 1{,}35$ et donc $-\frac{1}{2{,}6\times 1{,}3} \leqslant -\frac{1}{2x\sqrt{2-\ln(x)}} \leqslant -\frac{1}{2{,}7\times 1{,}35}$. Or $-\frac{1}{2{,}6\times 1{,}3} \approx -0{,}4807692307692307$ et $-\frac{1}{2{,}7\times 1{,}35} \approx -0{,}4357298474945534$ donc $h'(x) \in \left[-\frac{1}{3},0\right]$.
   (d) Inégalité des accroissements finis en utilisant la question précédente.
2. (a) La suite est bien définie car $h(I) \subset I$ et $u_0 \in I$. en appliquant l'inégalité des accroissements finis précédemment trouvée : $|h(u_n) - h(\alpha)| \leqslant \frac{1}{3}|u_n - \alpha|$ et α est un point fixe de h.
   (b) Démonstration par récurrence de : $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^n |u_0 - \alpha|$.
   (c) D'après le théorème des gendarmes $\lim_{n\to+\infty} u_n - \alpha = 0$.
   (d) Il suffit que $\frac{5}{1000}\left(\frac{1}{3}\right)^n \leqslant 10^{-6} \iff n\left(\frac{1}{3}\right) \leqslant 10^{-6}\frac{1000}{5} \iff n \geqslant \frac{10^{-6}}{-\ln(3)} \times \frac{1000}{5}$. $n_0 = 8$.

6. L'intégrale de Riemann.

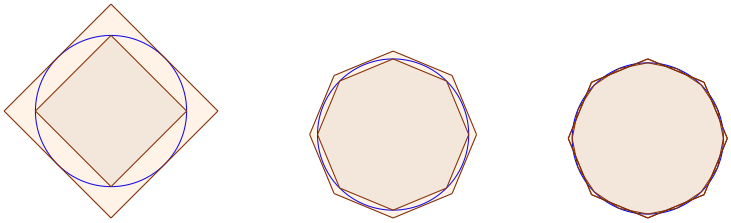
I Calcul de l'aire sous la courbe.

Comme (presque) toujours en mathématiques les théorie prennent naissance dans la géométrie. Le calcul intégral est l'aboutissement (en lien avec les fonctions) des problèmes de mesure d'aire.

Les mesures d'aires étaient appelés problèmes de quadratures. Dans le monde sans unité internationale de l'antiquité grecque, tout est question de rapport, de comparaison. Mesurer une aire c'est être capable de se ramener à des figures de même aire mais plus simples (carré, rectangle). Nous ne faisons pas autre chose en utilisant des cm^2 : nous comparons les aires à des petits carrés de 1 cm de côté. De plus ces petits carrés sont partout grâce au quadrillage induit par un repère orthonormé.

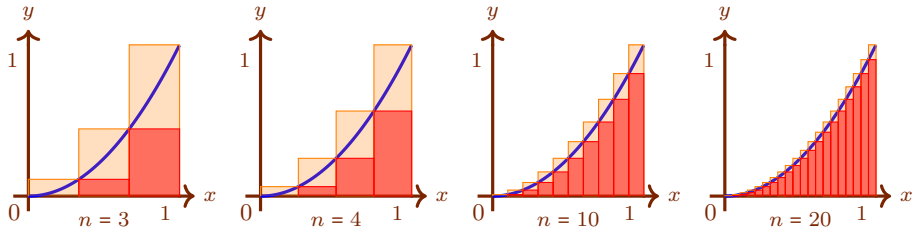
On peut imaginer un cheminement assez naturel. L'aire d'un rectangle est obtenue en le recouvrant de petits carrés son aire est alors le nombre de petits carrés. Ce dénombrement est simple : nombre de carrés unités sur la largeur multiplié par le nombre de carrés sur la longueur. L'aire d'un triangle rectangle est la moitié de l'aire d'un rectangle. L'aire d'un triangle quelconque est l'aire de deux triangles rectangles. L'aire d'un trapèze est l'aire de deux triangles et d'un rectangle. L'aire des lunules d'Hippocrate donnèrent aux Grecs bon espoir de pouvoir poursuivre cette démarche dans des cas de figures « arrondies » comme le cercle ou la parabole. Mais le problème de la quadrature du cercle resta si longtemps irrésolu que l'expression passa dans le langage courant pour désigner un problème insoluble. Ce problème est en réalité résolu : il est impossible de recouvrir un cercle avec les procédés usuels des Grecs.

Cependant il est un Grec, Archimède, qui trouva une parade. Recouvrir les figures par des figures dont on sait calculer l'aire certes, mais en nombre infini. C'est ainsi qu'il construisit deux suites de polygones dont les aires encadrent celle du cercle unité et tendent (à la limite) vers l'aire du cercle.



Un célèbre palimpseste semble indiquer qu'Archimède alla encore plus loin : il recouvrit la surface sous une parabole par une infinité de rectangles dont l'aire devenait infiniment petite. Il avait inventé le calcul intégral. Cette découverte fut oubliée pendant deux mille ans jusqu'à ce que Leibnitz et Newton inventent un procédé similaire au XVIIe siècle.

Voyons l'idée d'Archimède : encadrer l'aire de la parabole par des aires, faciles à calculées, formées par des rectangles de plus en plus fins.



On voit alors apparaître un encadrement de l'aire recherchée : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} \leqslant \mathscr{A} \leqslant \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$.

Bien sûr plus n est grand, plus l'encadrement se ressert et se rapproche de l'aire sous la courbe : idéalement lorsque n devient infiniment grand nous devrions obtenir exactement l'aire sous la parabole.

Dans le cas de la parabole on a : $\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n} \leqslant \mathscr{A} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}$ et donc : $\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}k^2 \leqslant \mathscr{A} \leqslant \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$. D'où : $\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \leqslant \mathscr{A} \leqslant \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$.

En passant à la limite, et d'après le théorème des gendarmes : $\mathscr{A} = \frac{1}{3}$. Ce procédé est le fondement théorique de ce calcul d'aire appelé intégrale de Riemann (en hommage au mathématicien qui en formalisa la construction).

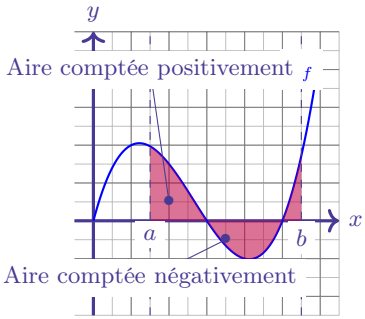
Définition 16. Soient a et b des réels $a < b$, f une fonction continue et positive sur $[a,b]$. L'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et deux droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$, et notée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est appelée *intégrale de f sur $[a;b]$*.

Remarques.

1. La notation est en fait un calque de la formule qui permet avant passage à la limite de calculer l'intégrale : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$.

Discret.	Continu.	Interprétation.
n	t	
$\dfrac{1}{n}$	$\mathrm{d}t$	Largeur d'un rectangle.
$f\left(\frac{k}{n}\right)$	$f(t)$	Longueur d'un rectangle.
Σ	$\int$	Somme.
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$	$\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$	Somme des aires des rectangles.

2. Géométriquement, visuellement, voyons ce que cela donne.



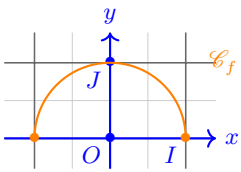
$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

Pour décrire en français la région du plan colorée ci-dessus nous dirons que c'est *la surface comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = a$ et la droite d'équation $x = b$.*

3. La notation $\mathrm{d}t$ dans la pratique permet simplement d'identifier la variable. Quelle est la variable dans l'expression $a(r-\alpha)^2 + \beta$?
4. $\mathrm{d}t$ qui est un infiniment petit correspond à la construction qui permet de définir l'intégrale (comme somme d'aires de rectangles de largeur $\mathrm{d}t$). Il est également présent dans les calculs de dérivés pour le taux d'accroissement entre infiniment petits $f'(t) = \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$.
5. Nous pouvons définir une nouvelle fonction en considérant b comme une variable $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$. Nous verrons plus loin que cette fonction est une primitive de f.
6. Le procéder de somme discrète avec passage à la limite ne fonctionne pas toujours. Il faut des fonctions suffisamment régulière (continue par exemple) pour pouvoir l'utiliser. Nous dirons qu'une fonction est *intégrable* lorsque le calcul d'aire est "possible".

Exemples.

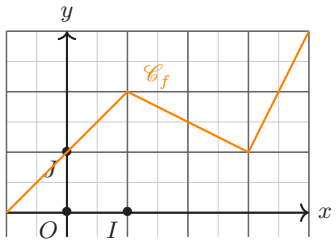
1. Soit f la fonction dont la courbe représentative est un demi-cercle au-dessus de l'axe des abscisses comme dessiné ci-dessous.



Calculons $\int_{-1}^{1} f(t)\ \mathrm{d}t$.
L'aire d'un demi-cercle de rayon 1 est : $\int_{-1}^{1} f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\pi \times 1^2$.

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.}$$

Exercice 76. On considère une fonction f dont la courbe représentative est dessinée ci-dessous.



Déterminez

a) $\int_{-1}^{1} f(t)\ \mathrm{d}t$.
b) $\int_{1}^{2} f(t)\ \mathrm{d}t$.
c) $\int_{2}^{3} f(t)\ \mathrm{d}t$.
d) $\int_{-1}^{3} f(t)\ \mathrm{d}t$.

Exercice 77. m, a et b sont des réels avec $m > 0$ et $a < b$.

a) $\displaystyle\int_{2}^{3} m\ \mathrm{d}t$.
b) $\displaystyle\int_{a}^{b} m\ \mathrm{d}t$.
c) $\displaystyle\int_{1}^{2} t\ \mathrm{d}t$.
d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} -x+1\ \mathrm{d}x$.
e) $\displaystyle\int_{2}^{2} 4x\ \mathrm{d}x$.
f) $\displaystyle\int_{-100}^{100} 0\ \mathrm{d}x$.

Exercice 78. Soit f la fonction affine par morceaux définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x+1, \text{ si } x \leqslant 2 \\ -2x+6 \text{ sinon.} \end{cases}$

Au moyen de considérations géométriques élémentaires, calculez l'aire $\int_0^3 f(t)\ \mathrm{d}t$ de la surface délimitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$.

II Théorèmes fondamentaux de l'analyse.

Exemples.

1. Soit $f : x \mapsto 3x$. Exprimez, en fonction de $t \in [0, +\infty[$, l'aire de la surface limitée par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = t$.

Théorème 2. Soient $a < b$ des réels, f une fonction continue et positive sur $[a;b]$. Si F est la fonction définie sur $[a;b]$ par : $\forall x \in [a;b]$, $F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$, alors : $\forall x \in [a;b]$, $F'(x) = f(x)$ et $F(a) = 0$.

Démonstration. Cette démonstration peut être passée en première lecture puisqu'elle nécessite la connaissance de propriétés de l'intégrale qui seront vues ultérieurement.

Soit $x_0 \in [a;b]$.

Démontrons que le nombre dérivé de F en x_0 est $f(x_0)$ <u>en supposant f croissante.</u>

Soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in [a; b]$.

$$\begin{aligned}
&\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \\
&= \frac{1}{h}\left[F(x_0+h) - F(x_0)\right] - f(x_0) \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_a^{x_0+h} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\ \mathrm{d}t\right] - \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{f(x_0)}{(x_0+h) - x_0}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_a^{x_0+h} f(t)\ \mathrm{d}t + \int_{x_0}^{a} f(t)\ \mathrm{d}t\right] - \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\ \mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0)\ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Supposons, par exemple, $h > 0$.

Pour tout $t \in [x_0; x_0 + h]$, f étant croissante :

$$f(x_0) \leqslant f(t) \leqslant f(x_0 + h).$$

Donc en intégrant sur $[x_0; x_0 + h]$ et puisque l'intégrale est croissante :

$$0 \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0)\ \mathrm{d}t \leqslant h\left[f(x_0+h) - f(x_0)\right].$$

Puis, comme $h \neq 0$:

$$0 \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0)\ \mathrm{d}t \leqslant f(x_0+h) - f(x_0).$$

Or, f étant continue, $f(x_0 + h) - f(x_0) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0)\ \mathrm{d}t \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

$$\boxed{F \text{ est dérivable en } x_0 \text{ et } F'(x_0) = f(x_0).}$$

Démonstration. Une démonstration alternative ne nécessitant pas la croissance.

Soit $M > 0$.

Puisque f est continue en x_0, il est possible de trouver h suffisamment petit pour que dès que $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$,

$$-M \leq f(t) - f(x_0) \leq M$$

Donc

$$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} -M\ \mathrm{d}t \leq \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} M\ \mathrm{d}t$$

$$-M \leq \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \leq M$$

Et puisque l'encadrement est vrai quelque soit M choisi (même très petit) cela signifie que pour h suffisamment petit $\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)$ l'est aussi :

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0) = 0$$

Ainsi

$$\boxed{F \text{ est dérivable en } x_0 \text{ et } F'(x_0) = f(x_0).}$$

Remarques.

1. Ainsi la fonction F définie dans ce théorème est la primitive de f qui s'annule en a. Par conséquent la recherche de primitive peut se ramener à un calcul d'intégrale.
2. Nous avons justifié l'existence d'une primitive pour une fonction continue positive (même sans être capable d'en donner une expression calculatoire).

Théorème 3. Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$ avec $a < b$ des réels et F une primitive de f sur $[a;b]$. $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

Démonstration. Découle du précédent théorème en remarquant que $x \mapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en a et en sachant que deux primitives diffèrent d'une constante.

Remarques.

1. Ce théorème ramène donc le calcul d'intégrale à des recherches de primitives. Par exemple, puisque $x \mapsto \frac{1}{2}\ln(x+1)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{2(t+1)}$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{2(t+1)}\ \mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{2}\ln(t+1)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\ln(3) - \frac{1}{2}\ln(1) \\ &= \frac{1}{2}\ln(3)\end{aligned}$$

2. La quantité $F(b) - F(a)$ est souvent notée $[F(t)]_a^b$.

Exemples.

1. Calculons $\int_1^4 u^2\ \mathrm{d}u$.

$$\begin{aligned}\int_1^4 u^2\ \mathrm{d}u &= \left[\frac{1}{3}u^3\right]_1^4 \\ &= \frac{1}{3}\times 4^3 - \frac{1}{3}\times 1^3\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^4 u^2\ \mathrm{d}u = \frac{63}{3}.}$$

2. $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} = [\ln(x)]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$.
3. $\int_0^{\pi/2} \cos(t)\ \mathrm{d}t = [\sin(t)]_0^{\pi/2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1$.
4. $\int_0^{1,2} 2z\mathrm{e}^{z^2}\ \mathrm{d}z = \left[\mathrm{e}^{z^2}\right]_0^{1,2} = \mathrm{e}^{1,2^2} - \mathrm{e}^{0^2} = \mathrm{e}^{1,44} - 1$.

Définition 17. Soient $a < b$ des réels, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue et F une primitive de f sur $[a,b]$. Nous appellerons *intégrale de f sur $[a,b]$* le nombre réel $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x := F(b) - F(a)$.

Remarques.

1. À quoi bon cette définition ? N'avons-nous pas déjà défini l'intégrale ? De facto nous avons défini l'intégrale d'une fonction positive. Avec cette définition nous généralisons le résultat à des fonctions dont le signe pourrait changer.
2. Cette définition nécessite de trouver une primitive de f alors que son existence n'est même pas garantie puisque le seul théorème vu concerne les fonctions continues et positives.

Exercice 79. Démontrez que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (-2x-3)\mathrm{e}^{-x}$, est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f, définie par $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-x}$. Déduisez-en la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (2t+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 80. Calculez les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-2}^{3} 2t\,\mathrm{d}t$. b) $\displaystyle\int_{-1}^{2} 3t^2\,\mathrm{d}t$. c) $\displaystyle\int_{-3}^{-1} -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$. d) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
e) $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$. f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(t)\,\mathrm{d}t$. h) $\displaystyle\int_1^2 \frac{-2}{x^3}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 81. Calculez les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin(y)\,\mathrm{d}y$. b) $\displaystyle\int_0^2 -2t^3+4t^2-5t\,\mathrm{d}t$. c) $\displaystyle\int_0^1 -3x+2\,\mathrm{d}x$. d) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.
e) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\,\mathrm{d}x$. g) $\displaystyle\int_{-2}^1 x^2+2x\,\mathrm{d}x$. h) $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 82. Calculez les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^9 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$. b) $\displaystyle\int_0^1 -3\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x$. c) $\displaystyle\int_4^{25} \frac{5}{\sqrt{x}}+3x\,\mathrm{d}x$. d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3}{x^4}\,\mathrm{d}x$.
e) $\displaystyle\int_{-1}^0 \mathrm{e}^{-2x+1}\,\mathrm{d}x$. f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x-3}{5}\,\mathrm{d}x$. g) $\displaystyle\int_0^4 t-3\,\mathrm{d}t$. h) $\displaystyle\int_1^4 \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 83. Calculez les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. b) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{2}{z^3}\,\mathrm{d}z$. c) $\displaystyle\int_{-1}^2 t^2-4t+3\,\mathrm{d}t$. d) $\displaystyle\int_1^2 t^2+t-\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.
e) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{t}}-\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. f) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t$. g) $\displaystyle\int_0^2 -4t^2+1\,\mathrm{d}t$. h) $\displaystyle\int_4^9 \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 84. Calculez les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-1}^1 t^2+2t-1\,\mathrm{d}x$.

Exercice 85. Calculez les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^2 2\times 2t\times\left(t^2+1\right)\,\mathrm{d}t$. b) $\displaystyle\int_0^2 3\times 2t\times\left(t^2+1\right)^2\,\mathrm{d}t$. c) $\displaystyle\int_1^2 -\frac{2t}{\left(t^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}t$.
d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t$. e) $\displaystyle\int_1^2 2t\mathrm{e}^{t^2+1}\,\mathrm{d}t$. f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 86. Calculez les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^2 2t\cos\left(t^2+1\right)\,\mathrm{d}t.$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1}\,\mathrm{d}x.$ c) $\displaystyle\int_{-1}^1 (1+s)^2\,\mathrm{d}s.$

d) $\displaystyle\int_0^{1/2} \mathrm{e}^{2y}\,\mathrm{d}y.$ e) $\displaystyle\int_0^5 \frac{1}{u+2}\,\mathrm{d}u.$ f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{3t-4}\mathrm{d}t.$

Exercice 87. Calculez les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{10}^{12} \frac{2u}{u^2-8}\,\mathrm{d}u.$ b) $\displaystyle\int_1^2 6x(x^2+4)^2\,\mathrm{d}x.$ c) $\displaystyle\int_0^{1/2} \pi\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x.$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} 3\sin\left(3y+\frac{\pi}{2}\right)\,\mathrm{d}y.$ e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{-1}{(1+y)^2}\,\mathrm{d}x.$ f) $\displaystyle\int_0^1 3x^2\mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x.$

Exercice 88. Calculez les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x.$ b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x.$ c) $\displaystyle\int_{-2}^3 \cos(\pi x)\,\mathrm{d}x.$

d) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x.$ e) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{2t+1}}\,\mathrm{d}t.$ f) $\displaystyle\int_{-1}^1 20t^4(t^5+2)^3\,\mathrm{d}t.$

Exercice 89. Calculez les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^4}{(t^5+3)^3}\,\mathrm{d}t.$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{3x+2}\,\mathrm{d}x.$ c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{u}{2}\right)\,\mathrm{d}u.$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(3y)\,\mathrm{d}y.$ e) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x.$ f) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(2t)\,\mathrm{d}t.$

Exercice 90. Calculez les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(2t)-\sin(t)\,\mathrm{d}t.$ b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin(3x)-4\cos(x)\,\mathrm{d}x.$ c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\,\mathrm{d}x.$

d) $\displaystyle\int_2^3 \frac{5}{2x-3}\,\mathrm{d}x.$ e) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x.$ f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+3t}}.$

Exercice 91. Calculez les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(t+2)^3}\,\mathrm{d}t.$ b) $\displaystyle\int_0^1 5t\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t.$ c) $\displaystyle\int_{\ln(a)}^{\ln(b)} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t,\ 0<a\leqslant b.$

d) $\displaystyle\int_0^2 5\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t.$ e) $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}u}{(2u+1)^2}.$ f) $\displaystyle\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5-x}}.$

Exercice 92. Calculez les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)(x^2+x+1)\,\mathrm{d}x.$ b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{2x+7}.$ c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$

d) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{t^3}{t^4+2}\,\mathrm{d}t.$ e) $\displaystyle\int_0^1 (x-2)(x^2-4x+1)^2\,\mathrm{d}x.$ f) $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2-1}\,\mathrm{d}x.$

Exercice 93. Calculez les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-2t}}\,\mathrm{d}t.$ b) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$ c) $\displaystyle\int_{\sqrt{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t.$

III Intégrales, propriétés.

Par convention (et pour que ce soit cohérent avec la relation de Chasles ci-dessous), si f est continue sur $[a,b]$, nous noterons : $\displaystyle\int_b^a f(t)\ \mathrm{d}t := -\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$. Les propriétés suivantes se conjecturent aisément par des considérations graphiques. Ce sont des propriétés indispensables pour des calculs d'aires. Si les intégrales de Riemann ne les avaient satisfaites nous aurions oublié ce procédé pour un autre.

Proposition 34. Soient $(a,b,c,\lambda) \in \mathbb{R}^4$, f une fonction continue sur $[a,b]$.

(i) Si la surface est réduite à un segment l'aire est nulle : $\int_a^b 0\ \mathrm{d}t = 0$.

(ii) *Relation de Chasles* : $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t$.

(iii) *Linéarité* : $\int_a^b \lambda f(t) + g(t)\ \mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$.

(iv) Croissance (et donc positivité), pour $a < b$: $f \leqslant g \Longrightarrow \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$.

D'où : $\left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$.

Démonstration. Ces propriétés se démontrent en utilisant la construction de Riemann des intégrales. Elles nécessitent les propriétés sur les limites de suites puisque les intégrales sont définies comme des limites de suites.

Elles peuvent être démontrées en utilisant l'existence d'une primitive puisque c'est la définition générale (pour une fonction de signe quelconque) que nous avons retenue.

Remarques.

1. La croissance de l'intégrale signifie que l'on peut intégrer des inégalités ou des encadrements.

Exemples.

1. La relation de Chasles nous permet de calculer des intégrales de fonctions définies par morceaux. Soit $f : x \mapsto \begin{cases} -2x+1 \text{ si } x < 0 \\ \mathrm{e}^x \text{ sinon} \end{cases}$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(t)\ \mathrm{d}t &= \int_{-1}^0 f(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^0 -2t+1\ \mathrm{d}t + \int_0^1 \mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t \\ &= [-t^2+t]_{-1}^0 + [\mathrm{e}^t]_0^1 \\ &= -2+\mathrm{e}-1 \\ &= \mathrm{e}-3\end{aligned}$$

2. La relation de Chasles permet de simplifier une somme d'intégrales (de la même fonction) comme elle simplifiait les sommes de vecteurs.

$$\begin{aligned}I &= \int_1^4 \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t + \int_4^{16} \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t + \int_{16}^6 \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_1^6 \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t \\ &= [\ln(t)]_1^6 \\ &= \ln(6)\end{aligned}$$

3. La linéarité nous permet de séparer l'intégrale d'une somme de fonctions en une somme d'intégrales de fonctions plus simples.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\mathrm{e}^x + 1\right)^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(\mathrm{e}^x\right)^2 + 2\mathrm{e}^x + 1 \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \mathrm{e}^{2x} \, \mathrm{d}x + 2\int_0^1 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x + \int_0^1 1 \, \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_0^1 + 2[\mathrm{e}^x]_0^1 + [x]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{1}{2} + 2\mathrm{e} - 2 + 1 \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 + 2\mathrm{e} - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

4. La croissance permet de déterminer le signe d'une intégrale sans connaître une primitive. Puisque $\frac{1}{x^2+1} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^1 \frac{1}{t^2+1} \, \mathrm{d}t > 0$ mais $\int_1^0 \frac{1}{t^2+1} \, \mathrm{d}t < 0$.
5. La croissance permet d'intégrer des inégalités. Par convexité $\mathrm{e}^x \geqslant x$ donc $\int_{-1}^1 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \geqslant \int_{-1}^1 x \, \mathrm{d}x$.
6.

Exercice 94. Écrivez chaque expression à l'aide d'une seule intégrale.

a) $\displaystyle\int_{-4}^6 f(x) \, \mathrm{d}x + \int_{-5}^{-4} f(x) \, \mathrm{d}x + \int_6^{10} f(x) \, \mathrm{d}x.$ b) $\displaystyle\int_{10}^{14} g(t) \, \mathrm{d}t - \int_5^0 g(t) \, \mathrm{d}t + \int_5^{10} g(t) \, \mathrm{d}t.$

c) $\displaystyle 3\int_1^2 g(x) \, \mathrm{d}x + 5\int_1^2 g(x) \, \mathrm{d}x.$ d) $\displaystyle -4\int_3^5 f(x) \, \mathrm{d}x - 5\int_5^3 g(x) \, \mathrm{d}x.$

Exercice 95. Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x^2+x}{x+1}$.

1. Démontrez : $\forall x \in]-1, +\infty[$, $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x+1}$.
2. Calculez $I = \int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x$.
3. Déterminez une valeur approchée de I.

Exercice 96. On considère la fonction f définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{4x+6}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

1. Démontrez que : $\forall x \in]-1, +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{x+3}$.
2. Calculez $I = \int_0^2 f(x) \, \mathrm{d}x$.

Exercice 97. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

1. Montrez que : $\forall x \in [1; 3]$, $\frac{1}{10} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}$.
2. Déduisez-en que $\frac{1}{5} \leqslant \int_1^3 f(x) \, \mathrm{d}x \leqslant 1$.

Exercice 98. f est la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$.

1. Montrez que : $\forall x \in [0; 15]$, $1 \leqslant f(x) \leqslant 4$.
2. Déduisez-en un encadrement de $\int_0^{15} f(x) \, \mathrm{d}x$.

Exercice 99.

1. Montrez que : $\forall t \in [1, +\infty[$, $0 \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.
2. Déduisez-en que : $\forall x \in [1, +\infty[$, $0 \leqslant \int_1^x \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-1}$.

Exercice 100. Montrez que : $0 \leqslant \int_0^1 x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e}-1$.

Exercice 101. On souhaite calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t$. Posons $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t$. Calculez J, puis $I+J$ et déduisez-en I.

Exercice 102. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \sin(t)\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$. Montrez que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

IV Intégrer des fonctions paires ou impaires sur une partie symétrique par rapport à 0.

V Valeur moyenne d'une fonction.

Proposition 35. Soient a et b deux réels tels que $a < b$, f une fonction continue sur $[a,b]$, m et M des réels. Si $m \leqslant f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in [a,b]$ alors $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M(b-a)$.

Démonstration. En utilisant la propriété de croissance de l'intégrale.

Exemples.

1. Étude de $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ sur $[-1;1]$. f est définie et continue et $f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$.

x	-1		0		1
f'		$+$	0	$-$	
f	e^{-1}	$\nearrow$	1	$\searrow$	e^{-1}

Nous en déduisons l'encadrement : $1 \geqslant f(x) \geqslant \mathrm{e}^{-1}$ quelque soit $x \in [-1;1]$. On en déduit en intégrant : $(1-(-1))\times 1 \geqslant \int_{-1}^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \geqslant (1-(-1))\mathrm{e}^{-1}$, *i.e.* $2\mathrm{e}^{-1} \leqslant \int_{-1}^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Cet encadrement est intéressant dans la mesure où nous ne connaissons pas de primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

Remarques.

1. Ce résultat est appelé inégalités de la moyenne.
2. Ce résultat est assez naturel géométriquement pour une fonction positive : l'aire sous la courbe est inférieure à l'aire du rectangle dont la hauteur est M et supérieure à celle du rectangle de hauteur m.

Exercice 103. Démontrez que $-2 \leqslant \int_1^3 \sin(x^2)\,\mathrm{d}x \leqslant 2$.

Exercice 104. Soit f la fonction définie sur $[-1;0]$ par $f(x) = \frac{3x+4}{(x+2)^2}$.

1. Dressez le tableau de variation de f.
2. Déduisez-en un encadrement de $f(x)$ sur $[-1;0]$.
3. Montrez que $1 \leqslant \int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{9}{8}$.

Exercice 105. On considère la suite, définie pour tout entier $n \geqslant 3$ par : $u_n = \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Étudiez la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.
2. Déduisez-en un encadrement de u_n pour chaque $n \geqslant 3$.
3. Concluez quant à la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 3}$.

Exercice 106.

1. En considérant la fonction inverse justifiez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$.
2. Déduisez-en que, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i} \leqslant \ln(n+1) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.
3. Déduisez en la convergence ou la divergence de $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. *Cette suite de sommes est appelée la série harmonique.*
4. Proposez un algorithme en Python qui donne un encadrement de $\ln(n)$ pour n un entier naturel non nul.

Proposition 36. Si $|f(x)| \leqslant M$ alors $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M(b-a)$.

Démonstration. Découle de l'inégalité de la moyenne.

Définition 18. Soient : a et b des réels avec $a < b$ et f une fonction continue sur $[a,b]$. Nous appellerons *valeur moyenne de f sur $[a,b]$* le réel $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarques.

1. Autrement dit μ est la réponse à la question : quelle serait la hauteur d'un rectangle dont un côté a une longueur de $b-a$ et dont l'aire égale celle $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$?
2. Cette valeur moyenne est la généralisation naturelle de la moyenne vue au collège : la somme de toutes les valeurs prises par la fonction ($\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$) divisée par l'effectif total ($\frac{1}{b-a}$).

Exercice 107. Lors d'une épidémie de grippe, le nombre de malades exprimé en milliers, t jours après l'apparition des premiers cas, est modélisé par la fonction f définie sur $[0;6]$ par $f(t) = 6t^2 - t^3$.

1. Calculez la valeur moyenne μ de la fonction f sur l'intervalle $[0;6]$.
2. Donnez une interprétation de ce résultat.

Exercice 108. Un mobile est étudié sur l'intervalle de temps $[0;20]$. Le temps est exprimé en secondes. La vitesse du mobile en $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, est donné par : $v(t) = 2t^2 + 3t$.

1. Calculez la valeur moyenne de la fonction v sur $[0;20]$.
2. Que représente cette valeur moyenne ?

Exercice 109. Les antibiotiques sont des molécules possédant la propriété de tuer des bactéries ou d'en limiter la progression. On note $f(t)$ la concentration dans le sang (en mg/L) en fonction du temps (en heures) d'un antibiotique administré en une seule dose à un animal, t appartenant à l'intervalle $[0;24]$. On admet que pour t dans cet intervalle $f(t) = \frac{50t}{t^2+4}$. Calculez la concentration moyenne de l'antibiotique pendant les 10 premières heures. Donnez la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième.

Exercice 110. Soit $I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de $f_n : x \mapsto x^n \mathrm{e}^{-x}$.

1. Conjecturez le sens de variation de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis démontrez-le.
2. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ et déduisez-en la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 111.

1. Démontrez que pour tout $x \in [0;1]$: $0 \leqslant x\mathrm{e}^{-x} \leqslant x\mathrm{e}^{-x^2}$.
2. Déduisez-en que $0 \leqslant \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

Exercice 112. Pour n un entier naturel non nul on pose : $I_n = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln(x))^n\,\mathrm{d}x$ et $J_n = \int_{\mathrm{e}}^{2\mathrm{e}} (\ln(x))^n\,\mathrm{d}x$.

1. Justifiez que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
2. Quel est le sens de variation de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Exercice 113. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculez u_0.
2. (a) Démontrez que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$.
   (b) Déduisez-en la valeur de u_1.
3. Démontrez que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Exercice 114. Soient $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$ et $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

1. (a) Justifiez que pour tout $x \in [0;1]$: $\frac{1}{1+x^n} \leqslant 1$.
   (b) Montrez que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 1.
2. (a) Montrez que, pour n dans $\mathbb{N}^*$, $0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   (b) Déduisez-en la limite de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. (a) Calculez pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n + J_n$.
   (b) Déterminez la limite de la suite (I_n).

Exercice 115. Soit (S_n) la suite définie, pour tout entier naturel n non nul, par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

1. On pose, pour tout entier naturel non nul n, $I_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$.
   (a) Calculez I_1.
   (b) Soit n un entier naturel non nul. En remarquant que, pour tout t appartenant à $[0;1]$, $t^{n-1}(1+t) - t^{n-1} = t^n$, montrez que $I_n = \frac{(-1)^n}{n} + I_{n-1}$.
   (c) Montrez par récurrence, que pour tout entier naturel non nul n, $I_n = \ln(2) - S_n$.
2. (a) Soit n un entier naturel non nul. En remarquant que pour tout t appartenant à $[0;1]$, $\frac{t^n}{t+1} \leqslant t^n$, montrez que : $0 \leqslant |I_n| \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   (b) Déduisez-en un encadrement de I_n par deux suites.
   (c) Que pouvez-vous en déduire concernant (I_n) ? puis (S_n) ?
3. (a) Montrez que, pour tout entier naturel non nul n : $S_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$.
   (b) Le mathématicien anglais William Brouncker (1620-1684) a proposé un algorithme de calcul de $\ln(2)$ traduit ci-dessous en Python.

```python
def Brouncker(n):
    S=0
    for k in range(n):
        S=S+1/((2*k+1)*(2*k+2))
    return S
```

Expliquez en quoi cet algorithme est pertinent.

VI Intégration par parties.

Nous connaissons une formule pour calculer la dérivée d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$. Nous allons utiliser cette formule pour calculer certaines intégrale qui restaient pour l'heure rétive au calcul.

Théorème 4. Soient a et b des réels avec $a \leqslant b$, u et v des fonctions dérivables sur $[a,b]$ dont les dérivées sont continues. Pour tout a et b de I : $\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration. En intégrant : $u'v = (uv)' - uv'$.

Exemples.

1. Calculons $\int_1^2 (x-1)\mathrm{e}^x \ \mathrm{d}x$.
On pose : $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = x-1$ donc $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v'(x) = 1$. Comme u' et v' sont continues sur $[1;2]$ on peut intégrer par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^2 (x-1)\mathrm{e}^x \ \mathrm{d}x &= \int_1^2 u'(x)v(x) \ \mathrm{d}x \\ &= [u(x)v(x)]_1^2 - \int_1^2 u(x)v'(x) \ \mathrm{d}x \\ &= \left[\mathrm{e}^x(x-1)\right]_1^2 - \int_1^2 \mathrm{e}^x \times 1 \ \mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^2(2-1) - \mathrm{e}^1(1-1) - \left[\mathrm{e}^x\right]_1^2 \\ &= \mathrm{e}^2 - (\mathrm{e}^2 - \mathrm{e})\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^2 (x-1)\mathrm{e}^x \ \mathrm{d}x = \mathrm{e}.}$$

2. Calculons $\int_1^{\mathrm{e}} x\ln(x) \ \mathrm{d}x$.
Posons $u'(x) = x$ et $v(x) = \ln(x)$ donc $u(x) = \frac{1}{2}x^2$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$. u' et v' étant continues sur [1,e] on peut intégrer par parties : $\int_1^{\mathrm{e}} x\ln(x) \ \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} u'(x)v(x) \ \mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} u(x)v'(x) \ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2 \times \ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{x} \ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 \times \ln(\mathrm{e}) - \left(\frac{1}{2}1^2 \times \ln(1)\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{1}{4}(\mathrm{e}^2 - 1^2)$.

$$\boxed{\int_1^{\mathrm{e}} x\ln(x) \ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}.}$$

3. Déterminons une primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On pourrait choisir n'importe quelle primitive mais nous rechercherons celle qui s'annule en 1. Intégrons $F(x) = \int_1^x \ln(t) \ \mathrm{d}t$.
Posons $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln(t)$ donc $u(t) = t$ et $v'(t) = \frac{1}{t}$. u' et v' étant dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ on peut intégrer par parties : $F(x) = \int_1^x u'(t)v(t) \ \mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_1^x - \int_1^x u(t)v'(t) \ \mathrm{d}t = [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t} \ \mathrm{d}t = x\ln(x) - 1 \times \ln(1) - [t]_1^x = x\ln(x) - x$.

$$\boxed{x \mapsto x\ln(x) - x \text{ est la primitive de ln qui s'annule en 1.}}$$

Exercice 116. À l'aide d'une intégration par parties calculez les intégrales suivantes.

a) $\int_0^{\pi} t\sin(t) \ \mathrm{d}t$. b) $\int_0^1 x\mathrm{e}^x \ \mathrm{d}x$. c) $\int_0^1 x\mathrm{e}^{-2x} \ \mathrm{d}x$.

Exercice 117. En procédant à deux intégrations par parties calculez $\int_0^{\pi} x^2\sin(x) \ \mathrm{d}x$.

Exercice 118. Calculez $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\sin(x) \ \mathrm{d}x$.

Exercice 119. Une entreprise produit x centaines d'objets chaque semaine. Le coût de production exprimé en milliers d'euros, est défini sur l'intervalle $[0;5]$ par la fonction C telle que : $C(x) = (4x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

1. En utilisant une intégration par parties, calculez la valeur moyenne de la fonction C sur l'intervalle $[0;5]$. Vous arrondirez le résultat à 10^{-3} près.
2. Quelle interprétation peut-on faire du résultat précédent pour l'entreprise ?

Exercice 120. Calculez $\int_0^1 (2t-1)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$, $\int_1^{\mathrm{e}} t^2(1-2\ln(t))\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2t-1)\sin(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 121. Notons $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2t-3)\cos^2(t)\,\mathrm{d}t$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2t-3)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Calculez $I + J$.
2. Calculez $I - J$ à l'aide d'une intégration par parties. *Vous pourrez utiliser la formule d'addition du cosinus :* $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.
3. Déduisez-en les valeurs de I et J.

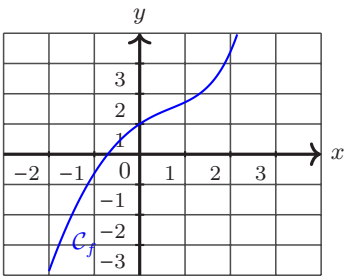
Exercice 122. Les questions 1 et 2 sont indépendantes. $\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des entiers strictement positifs. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale : $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n \,\mathrm{d}x$.

1. (a) Démontrer que pour tout x dans l'intervalle $]1\,;\,\mathrm{e}[$, et pour tout n entier naturel, on a : $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$.
   (b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante.
2. (a) Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.
   (b) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n$.
   (c) En déduire I_2, I_3 et I_4. Donner les valeurs exactes, exprimées en fonction de e, et les valeurs approchées à 10^{-3} près par défaut.
3. (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geqslant 0$.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)I_n \leqslant \mathrm{e}$.
   (c) En déduire la limite de I_n.
   (d) Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et en déduire la limite de nI_n.

Exercice 123. On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $x_n = \int_0^1 t^n \cos(t)\,\mathrm{d}t$ et $y_n = \int_0^1 t^n \sin(t)\,\mathrm{d}t$.

1. (a) Justifiez que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs.
   (b) Étudiez le sens de variation de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Déduisez-en que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
2. (a) Démontrez que pour tout entier naturel n non nul, $x_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   (b) Déduisez-en la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. (a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrez que pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$.
   (b) Déduisez-en la limite de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 124. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x^2$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, est donnée sur le graphique ci-dessous à compléter.



On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - x$ et on note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans le même repère.

Partie A : Remarques préliminaires concernant la fonction f

1. Sans chercher à déterminer son équation, tracer la tangente à $\mathcal{C}_f$ passant par O. On notera A son point de contact avec $\mathcal{C}_f$. Évaluer graphiquement le coefficient directeur de cette tangente en expliquant le procédé utilisé.
2. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. En déduire une interprétation graphique du nombre réel : $\mathrm{e}^2 - \mathrm{e} - \dfrac{7}{3}$.

Partie B : Étude de la fonction g

1. Étudier les limites de g en $+\infty$ et en 0 et justifier que $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote.
2. (a) Calculer la dérivée $g'(x)$ et montrer qu'elle est du signe de $(x-1)\mathrm{e}^x - x^2$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   (b) Soit u la fonction qui à tout x de l'intervalle $[0;+\infty[$ associe $u(x) = (x-1)\mathrm{e}^x - x^2$. Étudier le sens de variation de u sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
   (c) Déterminer le signe de $u(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,1[$.
   (d) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique a sur l'intervalle $[1\,;\,2]$. En déduire, suivant les valeurs de x, le signe de $u(x)$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
   (e) En déduire le signe de $g'(x)$ et dresser la tableau de variation de g.

Partie C : Construction de $\mathcal{C}_g$

1. On se propose de construire le point $S(a\ ;\ g(a))$ où a est le réel déterminé dans la question B. 2. d.
   (a) Montrer que, sur l'intervalle $]0;+\infty[$, $g'(x) = 0$ équivaut à $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$ et que par conséquent $f'(a) = \frac{f(a)}{a}$.
   (b) En utilisant ce résultat, établir que a est l'abscisse du point A défini dans la première partie.
   (c) Justifier que l'ordonnée de S est $f'(a)$ et placer S sur le dessin.
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
3. Construire la courbe $\mathcal{C}_g$.

Partie D : Étude d'une primitive de g et calcul d'une intégrale

Soit G la primitive de g sur l'intervalle $[1;2]$ qui s'annule pour $x = 1$ (on ne cherchera pas à calculer cette primitive).

1. Déterminer le sens de variation de G sur $[1;2]$.
2. Donner une interprétation géométrique du nombre $G(2)$. Dans la suite, on prendra 1,55 comme valeur approchée de $G(2)$ à 10^{-2} près.
3. On considère l'intégrale $J = \displaystyle\int_1^2 G(x)\,\mathrm{d}x$.
   (a) Justifier que l'intégrale I calculée dans la première partie peut s'écrire $I = \int_1^2 xg(x)\,\mathrm{d}x$.
   (b) En utilisant une intégration par parties, établir que $I = 2G(2) - J$ et en déduire une valeur approchée de J, à 10^{-2} près.

Exercice 125. Problème bac C sportifs de haut niveau octobre 1998.

Exercice 126. pondichery avril 1998

Exercice 127. On se propose de calculer l'intégrale $J = \int_0^1 \dfrac{x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^3}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculez les deux intégrales : $A = \int_0^1 \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$ et $B = \int_0^1 \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\,\mathrm{d}x$.

2. Déterminez trois nombres réels a, b et c tels que pour tout nombre réel t positif ou nul on ait : $\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2}$ (1).
3. En posant $t = \mathrm{e}^x$ dans l'égalité (1), calculez l'intégrale : $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\,\mathrm{d}x$.
4. (a) À l'aide d'une intégration par parties exprimez J en fonction de I.
   (b) Déduisez-en la valeur de J. À l'aide de la calculatrice donnez une valeur approchée de J à 10^{-2} près.

VII Calculer l'aire entre deux courbes.

Dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ le calcul de l'aire se fait en unités d'aires : $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$.

Proposition 37. Soit $\mathscr{A}$ l'aire délimitée par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. Si f est positive sur $[a,b]$ alors $\mathscr{A} = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Si f est négative sur $[a,b]$ alors $\mathscr{A} = \int_a^b -f(t)\,\mathrm{d}t$. Sinon $\mathscr{A} = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Exemples.

1. Aire sous la parabole sur $[0;1]$.
2. Aire, $f(x) = (x+1)(x-1) = x^2 - 1$ sur $[0;2]$.

Remarques.

1. Le calcul d'aire est un calcul intégrale. En ce sens il est simple. Cependant les sources d'erreur dans les exercices tiennent :
   — aux unités d'aires utilisées,
   — au signe du résultat du calcul de l'intégrale.

Proposition 38. Soit $\mathscr{A}$ l'aire délimitée par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. Si $f \leqslant g$ alors $\mathscr{A} = \int_a^b g(t) - f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemples.

1. Aire $f(x) = 2x^2 + x + 1$ et $g(x) = x^2 + 6x + 7$ sur $[-2;0]$.

Remarques.

1. Si f change de signe le calcul de l'aire délimitée par f est le calcul de $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.
2. Si f change de signe, dans la pratique, pour calculer l'aire délimitée par l'axe des abscisses la courbe représentative et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ on utilise la relation en intégrant sur les intervalles où f ne change pas de signe.

Exercice 128. Soient $f : x \mapsto x^2 - \frac{3}{x}$ et $g : x \mapsto x^2$ définies sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculez l'aire du domaine limité par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = \frac{1}{2}$ et $x = 2$.

Exercice 129. Soient $f : x \mapsto 3x^2 - 7x + 2$ et $g : x \mapsto x^2 - 5x + 6$ définies sur $\mathbb{R}$. Calculez l'aire du domaine limité par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

Exercice 130. Soit $f : x \mapsto x - 3 + \mathrm{e}^{-2x}$ définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Montrez que $\mathscr{D} :\ y = x - 3$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
2. Étudiez la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$.
3. Déduisez-en l'aire du domaine limité par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{D}$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \ln(2)$.

Exercice 131.

VIII Exercices.

Exercice 132. On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier $n \geqslant 0$ par $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$.

1. (a) Calculez $\int_0^1 (1-x)^n \,\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) À l'aide de l'encadrement $1 \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}$ valable sur l'intervalle $[0;1]$, montrez que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a : $\frac{1}{(n+1)!} \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{(n+1)!}$.
   (c) Montrez que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminez sa limite.
2. (a) Calculez I_0, puis I_1 à l'aide d'une intégration par parties.
   (b) Établissez, en intégrant par parties, que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $I_n - I_{n-1} = -\frac{1}{n!} \qquad (1)$.
3. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $J_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$.
   (a) En utilisant les relations (1) exprimez J_n en fonction de I_n et I_0.
   (b) Déduisez-en la limite J de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Justifiez l'encadrement $\frac{1}{(n+1)!} \leqslant J - J_n \leqslant \frac{e}{(n+1)!}$.

Exercice 133. Soit f la fonction numérique de la variable x définie par $f(x) = x + \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$. On appelle C la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. On prendra 2 cm comme unité.

1. Précisez l'ensemble de définition de f. Démontrez que le point I de coordonnées $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ est centre de symétrie pour C.
2. Étudiez les variations de f et construisez la courbe C.
3. Calculez en cm^2 l'aire $A(\lambda)$ du domaine plan fini limité par la courbe C, son asymptote oblique et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \lambda$ où λ est un réel supérieur ou égale à 1.

Exercice 134.

Exercice 135.

Exercice 136.

IX Corrections

Exercice 76. En comptant les carreaux (unités d'aire) inclus dans la partie concernée.

a) $\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 2$. b) $\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 1{,}75$. c) $\int_2^3 f(t)\,\mathrm{d}t = 1{,}25$.
d) $\int_{-1}^{3} f(t)\,\mathrm{d}t = 5$.

Exercice 77. Après avoir tracer les courbes on raisonne géométriquement. La variable est indiquée par le dt ou le dx. Les autres lettres désignent donc des constantes.

a) $\int_2^3 m\,\mathrm{d}t = m$. b) $\int_a^b m\,\mathrm{d}t = m(b-$ c) $\int_1^2 t\,\mathrm{d}t = 1{,}5$. d) $\int_{-1}^{1} -x+1\,\mathrm{d}x =$ e) $\int_2^2 4x\,\mathrm{d}x = 0$.
$a)$. 2.
f) $\int_{-100}^{100} 0\,\mathrm{d}x = 0$.

Exercice 78. $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{1}{2}x + 1\,\mathrm{d}x + \int_2^4 -2x + 6\,\mathrm{d}x = 3 + 0 = 3$.
Exercice 79. $F'(x) = (-2) \times \mathrm{e}^{-x} + (-2x-3)(-\mathrm{e}^{-x}) = [-2 + 2x + 3]\mathrm{e}^{-x} = (2x+1)\mathrm{e}^{-x} = f(x)$.
$\int_0^1 (2t+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[(2x+1)\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = (2\times 1 + 1)\mathrm{e}^{-1} - (2\times 0 + 1)\mathrm{e}^{-0} = 3\mathrm{e}^{-1} - 1$.
Exercice 80.

a) $\int_{-2}^{3} 2t \ \mathrm{d}t = \left[t^2\right]_{-2}^{3} = 3^2 - (-2)^2 = 5.$
b) $\int_{-1}^{2} 3t^2 \ \mathrm{d}t = \left[t^3\right]_{-1}^{2} = 2^3 - (-1)^3 = 9.$
c) $\int_{-3}^{-1} -\frac{1}{t^2} \ \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{t}\right]_{-3}^{-1} = \frac{1}{-1} - \frac{1}{-3} = -\frac{2}{3}.$
d) $\int_{0}^{4} \frac{1}{2\sqrt{t}} \ \mathrm{d}t = \left[\sqrt{t}\right]_{0}^{4} = \sqrt{4} - \sqrt{0} = 2.$
e) $\int_{1}^{2} \mathrm{e}^t \ \mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^t\right]_{1}^{2} = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}.$
f) $\int_{1}^{2} \frac{1}{t} \ \mathrm{d} = \left[\ln(t)\right]_{1}^{2} = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2).$
g) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos(t) \ \mathrm{d}t = \left[\sin(t)\right]_{0}^{\pi/4} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
h) $\int_{1}^{2} \frac{-2}{x^3} \ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{x^2}\right]_{1}^{2} = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2} = -\frac{3}{4}.$

Exercice 81.

a) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin(y) \ \mathrm{d}y = \left[-\cos(y)\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
b) $\int_{0}^{2} -2t^3 + 4t^2 - 5t \ \mathrm{d}t = \left[-\frac{2}{4}t^4 + \frac{4}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2\right]_{0}^{2} = -\frac{2}{4}2^4 + \frac{4}{3}2^3 - \frac{5}{2}2^2 - \left(-\frac{2}{4}0^4 + \frac{4}{3}0^3 - \frac{5}{2}0^2\right) = -\frac{22}{3}.$
c) $\int_{0}^{1} -3x + 2 \ \mathrm{d}x = \left[-\frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{0}^{1} = -\frac{3}{2} \times 1^2 + 2 \times 1 - \left(-\frac{3}{2} \times 0^2 + 2 \times 0\right) = \frac{1}{2}.$
d) $\int_{2}^{3} \frac{1}{x^2} \ \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_{2}^{3} = -\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}.$
e) $\int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{1}{x} \ \mathrm{d}x = \left[\ln(x)\right]_{1}^{\mathrm{e}} = \ln(\mathrm{e}) - \ln(1) = 1.$
f) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin(x) \ \mathrm{d}x = \left[-\cos(x)\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - (cos\,(0)) = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}.$
g) $\int_{-2}^{1} x^2 + 2x \ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_{-2}^{1} = \frac{1}{3} \times 1^3 + 1^2 - \left(\frac{1}{3} \times (-2)^3 + (-2)^2\right) = -2.$
h) $\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-2x} \ \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\times 1} - \left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\times(-1)}\right).$

Exercice 82.

a) $\int_{1}^{9} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_{1}^{9} = \sqrt{9} - \sqrt{1} = 2.$
b) $\int_{0}^{1} -3\mathrm{e}^{-3x} \ \mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{-3x}\right]_{0}^{1} = \mathrm{e}^{-3\times 1} - \mathrm{e}^{-3\times 0} = \mathrm{e}^{-3} - 1.$
c) $\int_{4}^{25} \frac{5}{\sqrt{x}} + 3x \ \mathrm{d}x = \left[10\sqrt{x} + \frac{3}{2}x^2\right]_{4}^{25} = 10\sqrt{25} + \frac{3}{2} \times 25^2 - \left(10\sqrt{4} + \frac{3}{2}4^2\right) = \frac{87}{3}.$
d) $\int_{1}^{2} \frac{3}{x^4} \ \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x^3}\right]_{1}^{2} = -\frac{1}{2^3} - \left(-\frac{1}{1^3}\right) = \frac{7}{8}.$
e) $\int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{-2x+1} \ \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x+1}\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\times 0+1} - \left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\times(-1)+1}\right) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^3 - \mathrm{e}).$
f) $\int_{0}^{1} \frac{2x-3}{5} \ \mathrm{d}x = \frac{1}{5}\left[x^2 - 3x\right]_{0}^{1} = \frac{1}{5}\left(1^2 - 3 \times 1 - (0^2 - 3 \times 0)\right) = -\frac{2}{5}.$
g) $\int_{0}^{4} t - 3 \ \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_{0}^{4} = \frac{1}{2} \times 4^2 - \frac{1}{2} \times 0^2 = 8.$
h) $\int_{1}^{4} \frac{3}{x} \ \mathrm{d}x = 3\left[\ln(x)\right]_{1}^{4} = 3\left(\ln(4) - \ln(1)\right) = 3\ln(4).$

Exercice 83.

a) $\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \ \mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right]_{-1}^{1} = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^{-1} - \left(\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-(-1)}\right) = 2\mathrm{e} - 2\mathrm{e}^{-1}.$
b) $\int_{-2}^{-1} \frac{2}{z^3} \ \mathrm{d}z = \left[-\frac{1}{z^2}\right]_{-2}^{-1} = -\frac{1}{(-1)^2} - \left(-\frac{1}{(-2)^2}\right) = -\frac{1}{4}.$
c) $\int_{-1}^{2} t^2 - 4t + 3 \ \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{3} \times 2^3 - 2 \times 2^2 + 3 \times 2 - \left(\frac{1}{3} \times (-1)^3 - 2 \times (-1)^2 + 3 \times (-1)\right) = \frac{18}{3}.$
d) $\int_{1}^{2} t^2 + t - \frac{1}{t} \ \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \ln(t)\right]_{1}^{2} = \frac{1}{3} \times 2^3 + \frac{1}{2} \times 2^2 - \ln(2) - \left(\frac{1}{3} \times 1^3 + \frac{1}{2} \times 1^2 - \ln(1)\right) = \frac{23}{6} - \ln(2).$
e) $\int_{1}^{4} \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t} \ \mathrm{d}t = \left[\sqrt{t} - \ln(t)\right]_{1}^{4} = \sqrt{4} - \ln(4) - \left(\sqrt{1} - \ln(1)\right) = 3 - \ln(4).$
f) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \ \mathrm{d}t = \left[\sin(t)\right]_{\pi/6}^{\pi/2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$
g) $\int_{0}^{2} -4t^2 + 1 \ \mathrm{d}t = \left[\frac{4}{3}t^3 + t\right]_{0}^{2} = \frac{4}{3} \times 2^3 + 2 - \left(\frac{4}{3} \times 0^3 + 0\right) = \frac{38}{3}.$
h) $\int_{4}^{9} \frac{1}{2\sqrt{t}} \ \mathrm{d}t = \left[\sqrt{t}\right]_{4}^{9} = \sqrt{9} - \sqrt{4} = 1.$

Exercice 84.

a) $\int_{-1}^{1} t^2+2t-1\ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}t^3+t^2-t\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}\times 1^3+1^2-1-\left(\frac{1}{3}\times(-1)^3+(-1)^2-(-1)\right) = -\frac{4}{3}$.

Exercice 85.

a) $\int_{1}^{2} 2\times 2t\times\left(t^2+1\right)\ \mathrm{d}t = \left[(t^2+1)^2\right]_{1}^{2} = (2^2+1)^2-(1^2+1)^2 = 21$.
b) $\int_{0}^{2} 3\times 2t\times\left(t^2+1\right)^2\ \mathrm{d}t = \left[(t^2+1)^3\right]_{0}^{2} = (2^2+1)^3-(0^2+1)^3 = 124$.
c) $\int_{1}^{2} -\frac{2t}{(t^2+1)^2}\ \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{t^2+1}\right]_{1}^{2} = \frac{1}{2^2+1}-\frac{1}{1^2+1} = -\frac{3}{10}$.
d) $\int_{1}^{2} \frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}\ \mathrm{d}t = \left[\sqrt{t^2+1}\right]_{1}^{2} = \sqrt{2^2+1}-\sqrt{1^2+1} = \sqrt{5}-\sqrt{2}$.
e) $\int_{1}^{2} 2t\mathrm{e}^{t^2+1}\ \mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^{t^2+1}\right]_{1}^{2} = \mathrm{e}^{2^2+1}-\mathrm{e}^{1^2+1}$.
f) $\int_{1}^{2} \frac{2t}{t^2+1}\ \mathrm{d}t = \left[\ln(t^2+1)\right]_{1}^{2} = \ln(2^2+1)-\ln(1^2+1) = \ln\left(\frac{5}{2}\right)$.

Exercice 86.

a) $\int_{1}^{2} 2t\cos\left(t^2+1\right)\ \mathrm{d}t = \left[\sin(t^2+1)\right]_{1}^{2} = \sin(2^2+1)-\sin(1^2+1) = \sin(5)-\sin(2)$.
b) $\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1}\ \mathrm{d}x = \left[-\ln\left(\mathrm{e}^{-x}+1\right)\right]_{0}^{1} = -\ln\left(\mathrm{e}^{-1}+1\right)-\left(-\ln\left(\mathrm{e}^{-0}+1\right)\right) = \ln(2)-\ln(1+\mathrm{e})+1$.
c) $\int_{-1}^{1} (1+s)^2\ \mathrm{d}s = \left[\frac{1}{3}(1+s)^3\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}(1+1)^3-\frac{1}{3}(1+(-1))^3 = \frac{8}{3}$.
d) $\int_{0}^{1/2} \mathrm{e}^{2y}\ \mathrm{d}y = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2y}\right]_{0}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\times\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\times 0} = \frac{1}{2}(\mathrm{e}-1)$.
e) $\int_{0}^{5} \frac{1}{u+2}\ \mathrm{d}u = [\ln(u+2)]_{0}^{5} = \ln(5+2)-\ln(0+2) = \ln\left(\frac{5}{2}\right)$.
f) $\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{3t-4}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3t-4}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3\times 1-4}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3\times(-1)-4} = \frac{1}{3}(\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-7})$.

Exercice 87.

a) $\int_{10}^{12} \frac{2u}{u^2-8}\ \mathrm{d}u = \left[\ln(u^2-8)\right]_{10}^{12} = \ln(12^2-8)-\ln(10^2-8) = \ln\left(\frac{136}{92}\right)$.
b) $\int_{1}^{2} 6x(x^2+4)^2\ \mathrm{d}x = \left[(x^2+4)^3\right]_{1}^{2} = (2^2+4)^3-(1^2+4)^3 = 287$.
c) $\int_{0}^{1/2} \pi\sin(\pi x)\ \mathrm{d}x = [-\cos(\pi x)]_{0}^{\frac{1}{2}} = -\cos\left(\pi\times\frac{1}{2}\right)-(-\cos(\pi\times 0)) = 1$.
d) $\int_{0}^{\pi/3} 3\sin\left(3y+\frac{\pi}{2}\right)\ \mathrm{d}y = \left[-\cos\left(3y+\frac{\pi}{2}\right)\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}} = -\cos\left(3\times\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)-\left(-\cos\left(3\times 0+\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0$.
e) $\int_{0}^{1} \frac{-1}{(1+y)^2}\ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{1+y}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{1+1}-\frac{1}{1+0} = -\frac{1}{2}$.
f) $\int_{0}^{1} 3x^2\mathrm{e}^{x^3}\ \mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{x^3}\right]_{0}^{1} = \mathrm{e}^{1^3}-\mathrm{e}^{0^3} = \mathrm{e}-1$.

Exercice 88.

a) $\int_{0}^{3} \frac{1}{2x+1}\ \mathrm{d}x = [\ln(2x+1)]_{0}^{3} = \ln(2\times 3+1)-\ln(2\times 0+1) = \ln(7)$.
b) $\int_{1}^{2} \frac{1}{(1+x)^2}\ \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_{1}^{2} = -\frac{1}{1+2}-\left(-\frac{1}{1+1}\right) = \frac{1}{6}$.
c) $\int_{-2}^{3} \cos(\pi x)\ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right]_{-2}^{3} = \frac{1}{\pi}\sin(\pi 3)-\frac{1}{\pi}\sin(\pi\times(-2)) = 0$.
d) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\ \mathrm{d}x = [\ln(\sin(x))]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)-\ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
e) $\int_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt{2t+1}}\ \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\sqrt{2t+1}\right]_{0}^{3} = \frac{1}{2}\sqrt{2\times 3+1}-\frac{1}{2}\sqrt{2\times 0+1} = \frac{-1+\sqrt{7}}{2}$.
f) $\int_{-1}^{1} 20t^4(t^5+2)^3\ \mathrm{d}t = \left[(t^5+2)^4\right]_{-1}^{1} = (1^5+2)^4-((-1)^5+2)^4 = 60$.

Exercice 89.

a) $\int_{0}^{1} \frac{t^4}{(t^5+3)^3}\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{10}\times\frac{1}{(t^5+3)^2}\right]_{0}^{1} = -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{(1^5+3)^2}-\frac{1}{(0^5+3)^2}\right) = \frac{4}{441}$.
b) $\int_{0}^{1} \frac{2}{3x+2}\ \mathrm{d}x = [2\ln(3x+2)]_{0}^{1} = 2\ln(3\times 1+2)-2\ln(3\times 0+2) = \ln\left(\frac{25}{4}\right)$.
c) $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{u}{2}\right)\ \mathrm{d}u = \left[-2\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} = -2\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right)-\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right) = -\sqrt{2}$.
d) $\int_{0}^{\pi} \cos(3y)\ \mathrm{d}y = \left[\frac{1}{3}\sin(3y)\right]_{0}^{\pi} = \frac{1}{3}\sin(3\pi)-\frac{1}{3}\sin(3\times 0) = 0$.
e) $\int_{0}^{1} \sqrt{\mathrm{e}^x}\ \mathrm{d}x = \left[2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\right]_{0}^{1} = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\times 1}-2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\times 0} = 2\sqrt{\mathrm{e}}-2$.
f) $\int_{0}^{\pi} \sin(2t)\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\cos(2t)\right]_{0}^{\pi} = -\frac{1}{2}\cos(2\pi)-\left(-\frac{1}{2}\cos(2\times 0)\right) = 0$.

Exercice 90.

a) $\int_0^{\pi} \cos(2t) - \sin(t)\ \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\sin(2t) + \cos(t)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\sin(2\pi) + \cos(\pi) - \left(\frac{1}{2}\sin(2\times 0) + \cos(0)\right) = -2.$

b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin(3x) - 4\cos(x)\ \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}\cos(3x) - 4\sin(x)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = -\frac{1}{3}\cos(3\times 0) - 4\sin(0) - \left(-\frac{1}{3}\cos\left(3\times\frac{-\pi}{2}\right) - 4\,\mathrm{si}\right.$
$-\frac{13}{3}.$

c) $\int_0^{\pi} \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)\ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{3}\sin\left(3\pi + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{3}\sin\left(3\times 0 + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{4}{3}.$

d) $\int_2^3 \frac{5}{2x-3}\ \mathrm{d}x = \left[\frac{5}{2}\ln(2x-3)\right]_0^1 = \frac{5}{2}\ln(2\times 3 - 3) - \frac{5}{2}\ln(2\times 2 - 3) = \frac{5}{2}\ln(3).$

e) $\int_0^1 \mathrm{e}^{3x}\ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3\times 1} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3\times 0} = \frac{-1+\mathrm{e}^3}{3}.$

f) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+3t}} = \left[\frac{2}{3}\sqrt{1+3t}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\sqrt{1+3\times 1} - \frac{2}{3}\sqrt{1+3\times 0} = 1.$

Exercice 91.

a) $\int_0^1 \frac{1}{(t+2)^3}\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\times\frac{1}{(t+2)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1+2)^2} - \frac{1}{(0+2)^2}\right) = \frac{5}{18}.$

b) $\int_0^1 5t\mathrm{e}^{t^2}\ \mathrm{d}t = \left[\frac{5}{2}\mathrm{e}^{t^2}\right]_0^1 = \frac{5}{2}\mathrm{e}^{1^2} - \frac{5}{2}\mathrm{e}^{0^2} = \frac{-1+\mathrm{e}}{5}.$

c) $\int_{\ln(a)}^{\ln(b)} \mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^t\right]_{\ln(a)}^{\ln(b)} = b - a.$

d) $\int_0^2 5\mathrm{e}^{3t}\ \mathrm{d}t = \left[\frac{5}{3}\mathrm{e}^{3t}\right]_0^2 = \frac{5}{3}\mathrm{e}^{3\times 2} - \frac{5}{3}\mathrm{e}^{3\times 0} = \frac{5}{3}(-1 + \mathrm{e}^6).$

e) $\int_0^3 \frac{\mathrm{d}u}{(2u+1)^2} = \left[-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2u+1}\right]_0^3 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\times 3+1} - \frac{1}{2\times 0+1}\right) = \frac{3}{7}.$

f) $\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5-x}} = \left[-2\sqrt{5-x}\right]_0^4 = -2\sqrt{5-4} - (-2\sqrt{5-0}) = -2 + 2\sqrt{5}.$

Exercice 92.

a) $\int_0^1 (2x+1)(x^2+x+1)\ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}(x^2+x+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2}(1^2+1+1) - \left(\frac{1}{2}(0^2+0+1)\right) = \frac{1}{2}.$

b) $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{2x+7} = [\ln(2x+7)]_1^2 = \ln(2\times 2+7) - \ln(2\times 1+7) = \ln\left(\frac{11}{9}\right).$

c) $\int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2}\ \mathrm{d}x = \left[-\frac{3}{2}\times\frac{1}{x^2+1}\right]_0^2 = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2^2+1} - \frac{1}{0^2+1}\right) = \frac{6}{5}.$

d) $\int_{-1}^2 \frac{t^3}{t^4+2}\ \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{4}\ln\left(t^4+2\right)\right]_{-1}^2 = \frac{1}{4}\ln\left((2)^4+2\right) - \frac{1}{4}\ln\left((-1)^4+2\right) = \frac{1}{4}\ln(6).$

e) $\int_0^1 (x-2)(x^2-4x+1)^2\ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6}(x^2-4x+1)^3\right]_0^1 = \frac{1}{6}(1^2-4\times 1+1)^3 - \left(\frac{1}{6}(0^2-4\times 0+1)^3\right) = \frac{7}{6}.$

f) $\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2-1}\ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2-1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{1^2-1} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{0^2-1} = \frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{2}.$

Exercice 93.

a) $\int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-2t}}\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\ln(1+\mathrm{e}^{-2t})\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\ln(1+\mathrm{e}^{-2\times 1}) - \left(-\frac{1}{2}\ln(1+\mathrm{e}^{-2\times 0})\right) = \frac{\ln(2)-\ln(1+\mathrm{e}^{-2})}{2}.$

b) $\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(t)}{t}\ \mathrm{d}t = \left[(\ln(t))^2\right]_1^{\mathrm{e}^2} = \left(\ln(\mathrm{e}^2)\right)^2 - (\ln(1))^2 = 4.$

c) $\int_{\sqrt{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} \frac{1}{t\ln(t)}\ \mathrm{d}t = [\ln\circ\ln(t)]_{\sqrt{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} = \ln\circ\ln(\mathrm{e}) - \ln\circ\ln(\mathrm{e}^2) = -\ln(2).$

Exercice 94.

a) $\int_{-4}^6 f(x)\ \mathrm{d}x + \int_{-5}^{-4} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_6^{10} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-5}^{-4} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_{-4}^6 f(x)\ \mathrm{d}x + \int_6^{10} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-5}^{10} f(x)\ \mathrm{d}x.$

b) $\int_{10}^{14} g(t)\ \mathrm{d}t - \int_5^0 g(t)\ \mathrm{d}t + \int_5^{10} g(t)\ \mathrm{d}t = \int_{10}^{14} g(t)\ \mathrm{d}t + int_0^5 g(t)\ \mathrm{d}t + \int_5^{10} g(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^5 g(t)\ \mathrm{d}t +$
$\int_5^{10} g(t)\ \mathrm{d}t + \int_{10}^{14} g(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{14} g(t)\ \mathrm{d}t.$

c) $3\int_1^2 g(x)\ \mathrm{d}x + 5\int_1^2 g(x)\ \mathrm{d}x = \int_1^2 3g(x) + 5g(x)\ \mathrm{d}x = 8\int_1^2 g(x)\ \mathrm{d}x.$

d) $-4\int_3^5 f(x)\ \mathrm{d}x - 5\int_5^3 g(x)\ \mathrm{d}x = \int_3^5 -4f(x) + 5g(x)\ \mathrm{d}x.$

Exercice 95.

1. $2x - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{(2x-1)(x+1)+1}{x+1} = \frac{x^2-x}{x+1} = f(x).$
2. $I = \int_0^1 2x - 1 + \frac{1}{x+1}\ \mathrm{d}x = \left[x^2 - x + \ln(x+1)\right]_0^1 = 1^2 - 1 + \ln(1+1) - \left(0^2 - 0 + \ln(0+1)\right) = \ln(2).$
3. $I \approx 0{,}6931471805599453.$

Exercice 96.

1. $f(x) = \frac{1\times(x+2)(x+3)+2\times(x+1)(x+3)-3\times(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)} = f(x)$.
2. $I = \int_0^2 \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{x+3}\ \mathrm{d}x = [\ln(x+1) + 2\ln(x+2) + 3\ln(x+3)]_0^2 = \ln(2+1) + 2\ln(2+2) + 3\ln(2+3) - (\ln(0+1) + 2\ln(0+2) + 3\ln(0+3)) = \ln\left(\frac{500}{3}\right)$.

Exercice 97.

1. $1 \leqslant x \leqslant 3 \Leftrightarrow 1 + 1^2 \leqslant 1 + x^2 \leqslant 1 + 3^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{1+x^2} \geqslant \frac{1}{10}$.
2. En intégrant le précédent encadrement : $\frac{1}{10}\int_1^3 \mathrm{d}t \leqslant \int_1^3 f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\int_1^3 \mathrm{d}t \Leftrightarrow \frac{2}{10} \leqslant \int_1^3 f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{2}$.

Exercice 98.

1. $0 \leqslant x \leqslant 15 \Leftrightarrow \sqrt{0+1} \leqslant \sqrt{1+x} \leqslant \sqrt{1+15} \Leftrightarrow 1 \leqslant f(x) \leqslant 4$.
2. $\frac{15}{1} \geqslant \int_0^{15} f(x)\ \mathrm{d}x \geqslant \frac{15}{4}$.

Exercice 99.

1. $t \geqslant 1$ donc $t^2 \geqslant t$. Or $\mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$ et $\mathrm{e}^{-t^2} > 0$ donc par produit tous les nombres considérés étant strictement positifs, $0 \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.
2. $\int_0^x 0 \leqslant \int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \mathrm{e}^{-t} \Leftrightarrow 0 \leqslant \int_1^x \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-1}$.

Exercice 100. $0 \leqslant x \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant x\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^x$ puis en intégrant sur $[0;1]$: $0 \leqslant \int_0^1 x\mathrm{e}^x \leqslant [\mathrm{e}^x]_0^1$.

Exercice 101. $\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t+1}\ \mathrm{d}t = \left[\ln\left(\mathrm{e}^t+1\right)\right]_0^1 = \ln\left(\mathrm{e}^1+1\right) - \ln\left(\mathrm{e}^0+1\right) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}+1}{2}\right)$. Par linéarité $I + J = \int_0^1 1\ \mathrm{d}t = 1$. $I + J = 1 \Leftrightarrow I = 1 - J \Leftrightarrow I = 1 - \ln\left(\frac{\mathrm{e}+1}{2}\right)$.

Exercice 102. $[0;1] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc, pour tout $t \in [0;1]$, $0 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$. D'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 0\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \sin(t)\mathrm{e}^{-nt}\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-nt}\ \mathrm{d}t$. On conclut avec le théorème des gendarmes : $\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n} = 0$.

Exercice 103. $0 \leqslant \sin(x^2) \leqslant 1$ donc : $(3-1)\times(-1) \leqslant \int_1^3 \sin(x^2)\ \mathrm{d}x \leqslant (3-1)\times 1$.

Exercice 104.

1. $f'(x) = \frac{3(x+2)^2-(3x+4)2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{(x+2)[3x+6-6x-8]}{(x+2)^4} = \frac{(x+2)(-3x-2)}{(x+2)^4}$.

x	-2		$-\frac{2}{3}$		0
f'		$+$	0	$-$	
f	1	$\nearrow$	$f\left(-\frac{2}{3}\right)$	$\searrow$	1

$f\left(-\frac{2}{3}\right) = 1{,}125 = \frac{9}{8}$.

2. $1 \leqslant f(x) \leqslant \frac{9}{8}$ pour tout $x \in [-1;0]$.
3. En intégrant le précédent encadrement.

Exercice 105.

1. $f'(x) = -\frac{1}{x^2}\ln(x) + \frac{1}{x}\times\frac{1}{x} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$

x	0		e		$+\infty$
f'	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

2. Pour $n \geqslant 3 \geqslant \mathrm{e}$: $\frac{\ln(n)}{n} \geqslant f(t) \geqslant \frac{\ln(n+1)}{n+1}$ pour tout $t \in [n,n+1]$.
3. $\frac{\ln(n)}{n} \geqslant u_n \geqslant \frac{\ln(n+1)}{n+1}$.
4. (u_n) converge vers 0.

Exercice 106.

1. $\forall x \in [n,n+1]$, $\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{n+1}$ puis inégalités de la moyenne.
2. En sommant les inégalités membre à membre.
3. Diverge vers $+\infty$ par comparaison.
4. En reprenant l'encadrement de la question 2 mais au rang n et non $n+1$: $\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} \leqslant \ln(n) \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}$.

```python
def loganepenc(n):
    m=0
    M=0
    for i in range(1,n-1):
        m=m+1/(i+1)
        M=M+1/i
    return m,M
```

Exercice 107.

1. $\mu = \frac{1}{6-0}\int_0^6 6t^2 - t^3 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\left[2t^3 - \frac{1}{4}t^4\right]_0^6 = \frac{1}{6}\left(2\times 6^3 - \frac{1}{4}\times 6^4 - \left(2\times 0^3 - \frac{1}{4}\times 0^4\right)\right) = 18$
2. Sur les 6 premiers jours de l'épidémie le nombre moyen de malades est de 18 milliers.

Exercice 108.

1. $\frac{1}{20-0}\int_0^{20} 2t^2 + 3t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{20}\left[\frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2\right]_0^{20} = \frac{1}{20}\left(\frac{2}{3}\times 20^3 + \frac{3}{2}\times 20^2 - \left(\frac{2}{3}\times 0^3 + \frac{3}{2}\times 0^2\right)\right) = \frac{890}{3} \approx 296{,}67$
2. La vitesse moyenne du mobile est de 297 $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Exercice 109. $\int_0^{10} \frac{50t}{t^2+4} \,\mathrm{d}t = 50 \times \frac{1}{2} \times \left[\ln\left(t^2+4\right)\right]_0^{10} = 25 \times \left(\ln(10^2+4) - \ln(4)\right) \approx 81{,}45241345$.

Exercice 110.

1. Conjecture avec la calculatrice à partir des deux premiers termes de la suite. Si $x \in [0;1]$ alors $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $x^n \geqslant 0$ donc en multipliant par x^n : $0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n$. En multipliant par e^{-x} puis en intégrant sur $[0;1]$: $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$. La suite est décroissante.
2. Si $x \in [0;1]$ alors $1 \geqslant \mathrm{e}^{-x} \geqslant \mathrm{e}^{-1} \geqslant 0$. Donc, pour $x \in [0;1]$, $0 \leqslant x^n\mathrm{e}^{-x} \leqslant x^n$. D'où l'encadrement désiré en intégrant sur $[0;1]$. Nous concluons avec le théorème des gendarmes : $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 111.

1. $0 \leqslant x \leqslant 1$ donc $x^2 \leqslant x$ et $\mathrm{e}^{-x^2} \geqslant \mathrm{e}^{-x}$. Comme $x \geqslant 0$ on peut conclure.
2. En intégrant. $\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2} \,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^1$.

Exercice 112.

1. Sur $[1,\mathrm{e}]$, $0 \leqslant \ln(x) \leqslant 1$ donc $(\ln(x))^{n+1} \leqslant (\ln(x))^n$. En intégrant $I_{n+1} \leqslant I_n$. La suite est décroissante.
2. Si $x \in [\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$ alors $\ln(x) \geqslant 1$ et donc $(\ln(x))^{n+1} \geqslant (\ln(x))^n$ donc la suite est croissante.

Exercice 113.

1. $u_0 = \int_0^1 \frac{x^0}{1+x} \,\mathrm{d}x = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(1+1) - \ln(0+1) = \ln(2)$.
2. (a) $u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} \,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{1+x} \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.
   (b) $u_1 + u_0 = \frac{1}{1} \Leftrightarrow u_1 = 1 - \ln(2)$.
3. $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x} \,\mathrm{d}x \leqslant 0$ car pour tout $x \in [0;1]$, $\frac{x^n(x-1)}{1+x} \leqslant 0$.

Exercice 114.

1. (a) $x \in [0;1] \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 1 \Leftrightarrow 0$ donc : $1 \leqslant x^n \leqslant 1$ puis : $\frac{1}{0+1} \geqslant \frac{1}{x^n+1} \geqslant \frac{1}{1+1}$.
   (b) $\frac{1}{1+x^n} \leqslant 1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{d}x$.
2. (a) $0 \leqslant \frac{x^n}{1+x^n} \leqslant x^n$ pour $x \in [0;1]$ donc en intégrant $0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

(b) $\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

3. (a) $I_n + J_n = \int_0^1 \frac{1+x^n}{1+x^n}\ \mathrm{d}x = 1$.
   (b) $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 115.

1. (a) $I_1 = (-1)^1 \int_0^1 \frac{t^1}{1+t}\ \mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{t}{1+t}\ \mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{1+t}{1+t} - \frac{1}{t+1}\ \mathrm{d}t = -(1-\ln(2))$.
   (b) $(-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\ \mathrm{d} = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n-1}(1+t)-t^{n-1}}{1+t}\ \mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^1 t^{n-1}\ \mathrm{d}t + (-1)^{n-1} \int_0^2 \frac{t^{n-1}}{1+t}\ \mathrm{d}t = (-1)^n \left[\frac{1}{n}t^n\right]_0^1 + I_{n-1} = \frac{(-1)^n}{n} + I_{n-1}$.
   (c) $I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + I_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \ln(2) - S_n = \ln(2) - S_{n+1}$.
2. (a) $0 \leqslant |I_n| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{t^n}{1+t}\right|\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\ \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   (b) $-\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   (c) $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$. $\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln(2)$
3. (a) Par changement de variable puis par regroupement des termes par couples : $\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$.
   (b) Il calcul des termes de (S_n) qui converge vers $\ln(2)$ donc d'après la définition de la limite ...

Exercice 116.

a) $\int_0^\pi t\sin(t)\ \mathrm{d}t = [-\cos(t)t]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos(t)\times 1\ \mathrm{d}t = \pi + [\sin(t)]_0^\pi = \pi$.
b) $\int_0^1 x\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^x x\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x \times 1\ \mathrm{d}x = \mathrm{e} - \left[\mathrm{e}^x\right]_0^1 = 1$.
c) $\int_0^1 x\mathrm{e}^{-2x}\ \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}-2\mathrm{x}x\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\times 1\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^1 = -\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2} + \frac{1}{4}$.

Exercice 117. $\int_0^\pi x^2\sin(x)\ \mathrm{d}x = \left[-\cos(x)x^2\right]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos(x)\times 2x\ \mathrm{d}x = \pi^2 + 2\int_0^\pi x\cos(x)x\ \mathrm{d}x = \pi^2 + 2\left([\sin(x)x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin(x)\times 1\ \mathrm{d}x\right) = \pi^2 - 2[-\cos(x)]_0^\pi = \pi^2 - 4$.

Exercice 118. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\sin(x)\ \mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^x\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\cos(x)\ \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \Big(\left[\mathrm{e}^x\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\times(-\sin(x))$ c
$\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 1 - I_n$ donc $2I_n = \frac{\pi}{2} + 1 \Leftrightarrow I_n = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$.

Exercice 119.

1. $\mu = \frac{1}{5-0}\int_0^5 (4x+1)\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{5}\left(\left[-\mathrm{e}^{-x}(4x+1)\right]_0^5 - \int_0^5 -\mathrm{e}^{-x}\times 4\ \mathrm{d}x\right) = \frac{1}{5}\left(-\mathrm{e}^{-5}(4\times 5+1) - \left(-\mathrm{e}^{-0}(4\times 0\right.\right.$
$\frac{1}{5}\left(1 - 21\mathrm{e}^{-5} + 4\left(-\mathrm{e}^{-5} - \left(-\mathrm{e}^{-0}\right)\right)\right) = \frac{5-25\mathrm{e}^{-5}}{5} \approx$.
2. Lorsque l'entreprise produit 500 objets par semaine le coût de production moyen est de 966 euros par centaine d'objets produits.

Exercice 120. $\int_0^1 (2t-1)\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^t(2t-1)\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^t\times 2\ \mathrm{d}t = \mathrm{e}-1-2\left[\mathrm{e}^t\right]_0^1 = -\mathrm{e}+1$, $\int_1^{\mathrm{e}} t^2(1-2\ln(t))\ \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}t^3(1-2\ln(t))\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{3}t^3\times\frac{-2}{t}\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^3 - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^{\mathrm{e}} = -\frac{1}{9}\mathrm{e}^3 - \frac{5}{9}$ et $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2t-1)\sin(t)\ \mathrm{d}t = [-\cos(t)(2t-1)]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} -\cos(t)\times 2\ \mathrm{d}t = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{3}-1\right) - 1 + 2[\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{3}-1\right)$.

Exercice 121.

1. $I+J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2t-3)\cos^2(t) + (2t-1)\sin^2(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2t-3)\left(\cos^2(t)+\sin^2(t)\right)\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2t-3\ \mathrm{d}t = \left[t^2-3t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi^2-12\pi}{16}$.
2. $I-J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2t-3)\left(\cos^2(t)-\sin^2(t)\right)\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2t-3)\cos(2t)\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\sin(2t)\times(2t-3)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\frac{1}{2}\sin(2t)\times 2\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-3\right) + \left[-\frac{1}{2}\cos(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\pi}{4} + 2$.
3. En sommant : $2I = \frac{\pi^2-12\pi}{16} - \frac{\pi}{4} + 2$ et en faisant la différence : $2J = \frac{\pi^2-12\pi}{16} - \left(-\frac{\pi}{4}+2\right)$.

Exercice 122.

1. (a) $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} = (\ln x)^n(1-\ln x)$. Or $\ln(x) > 0$ sur $[1,\mathrm{e}]$ et $1-\ln x > 0$ sur $[1,\mathrm{e}]$ donc $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$.
   (b) En intégrant la précédente inégalité : $I_n - I_{n+1} > 0 \Leftrightarrow I_n \geqslant I_{n+1}$ donc (I_n) est décroissante.

2. (a) $I_1 = \int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\ \mathrm{d}x = [x\ln(x)]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x \times \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = \mathrm{e} - [t]_1^{\mathrm{e}} = 1$.
   (b) $I_{n+1} = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^{n+1}\ \mathrm{d}x = \left[x(\ln x)^{n+1}\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x \times (n+1) \times \frac{1}{x} \times (\ln x)^n\ \mathrm{d}x = \mathrm{e} - (n+1)\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n\ \mathrm{d}x = \mathrm{e} - (n+1)I_n$.
   (c) $I_2 = \mathrm{e} - 2$, $I_3 = -2\mathrm{e} + 6$ et $I_4 = 9\mathrm{e} - 24$.
3. (a) Pour tout $x \in [1,\mathrm{e}]$, $\ln(x) \geqslant 0$ donc $I_n \geqslant 0$.
   (b) $I_{n+1} \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e} - (n+1)I_n \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e} \geqslant (n+1)I_n$.
   (c) $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}$ donc converge vers 0 d'après le théorème des gendarmes.
   (d) $nI_n + (I_n + I_{n+1}) = (n+1)I_n + I_{n+1} = \mathrm{e}$ donc $\lim_{n\to+\infty} nI_n = \mathrm{e}$.

Exercice 123.

1. (a) $\forall t \in [0;1]$, $t^n \cos(t) \geqslant 0$ puis par positivité de l'intégrale.
   (b) $x_{n+1} - x_n = \int_0^1 t^n(t-1)\cos(t)\ \mathrm{d}t \leqslant 0$ par positivité de l'intégrale.
   (c) Décroissante et minorée par 0 donc converge vers un réel $\ell \geqslant 0$ (et on pourrait montrer $\ell \leqslant 1$).
2. (a) $x_n = \int_0^1 t^n \cos(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\ \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$ par croissance de l'intégrale.
   (b) D'après le théorème des gendarmes $\ell = 0$.
3. (a) $x_{n+1} = \left[\sin(t)t^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \sin(t) \times (n+1)t^n\ \mathrm{d}t = -(n+1)y_n + \sin(1)$.
   (b) $\lim_{n\to+\infty}(y_n) = 0$.

Exercice 124. **Partie A : Remarques préliminaires concernant la fonction f**

1. En utilisant $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ on obtient environ 1,5.
2. $I = \int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_1^2 \mathrm{e}^x - x^2\ \mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^x - \frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \mathrm{e}^2 - \frac{1}{3} \times 2^3 - \left(\mathrm{e}^1 - \frac{1}{3} \times 1^3\right) = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e} - \frac{7}{3}$
3. f étant positive sur $[1,2]$ et le repère étant orthonormé $\mathrm{e}^2 - \mathrm{e} - \dfrac{7}{3}$ représente l'aire, exprimée en unités d'aire, délimité par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et la droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

Partie B : Étude de la fonction g

1. Par croissance comparée $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et donc pas d'asymptote horizontale. $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^x - x^2 = 1$ donc par produit $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = +\infty$. $\mathcal{C}_g$ admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
2. (a) $g'(x) = \frac{\mathrm{e}^x \times x - \mathrm{e}^x \times 1}{x^2} - 1 = \frac{\mathrm{e}^x(x-1) - x^2}{x^2}$. g est du signe de $(x-1)\mathrm{e}^x - x^2$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ car : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^2 > 0$.
   (b) $u'(x) = \mathrm{e}^x + (x-1)\mathrm{e}^x - 2x = x\left(\mathrm{e}^x - 2\right)$ et $u(x) = x^2 \times \frac{x-1}{x} \times \frac{\mathrm{e}^x}{x} - 1$ d'où la limite en $+\infty$ par croissance comparée.

x	0		$\ln(2)$		$+\infty$
u'	0	$-$	0	$+$	
u	-1	$\searrow$	$2\ln(2) - 2 - \ln(2)^2$	$\nearrow$	$+\infty$

   (c) $u(1) = -1$ donc, d'après la question précédente : $\forall x \in [0;1[$, $u(x) < 0$.
   (d) u est continue comme produit et somme de fonctions continues, $u(1) < 0$ et $u(2) > 0$, u et strictement croissante sur $[1;2]$ donc , d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique $a \in [1;2]$ tel que $u(x) = 0$.

x	0		a		$+\infty$
u		$-$	0	$+$	

   (e)

x	0		a		$+\infty$
g'	‖	$-$	0	$+$	
g	‖ $+\infty$	↘	$g(a)$	↗	$+\infty$

Partie C : Construction de $\mathcal{C}_g$

1. (a) $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x(x-1)-x^2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow xe^x - e^x - x^2 = 0 \Leftrightarrow xe^x - 2e^x + e^x - x^2 = 0 \Leftrightarrow -xe^x + 2e^x = f(x) \Leftrightarrow xf'(x) = f(x)$ et donc $g'(a) = 0 \Leftrightarrow f'(a) = \frac{f(a)}{a}$.
   (b) $T_a :\ y = f'(a)(x-a) + f(a)$ donc $T_a :\ y = f'(a)x - af'(a) + f(a)$ et $T_a :\ y = f'(a)x$. Ordonnée à l'origine nulle donc la tangente passe par l'origine et a est l'abscisse de A.
   (c) $g(a) = \frac{f(a)}{a} = f'(a)$.
2. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow (1-x)f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ sur $]0, +\infty[$ car $e^x > x^2$ sur $\mathbb{R}_+$. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
3.

Partie D : Étude d'une primitive de g et calcul d'une intégrale

1. $g \leqslant 0$ sur $[1;2]$ donc G est décroissante sur $[1;2]$.
2. $G(2)$ est l'opposé de l'aire délimitée par l'axe des abscisse $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.
3. (a) Immédiat.
   (b) $I = \int_1^2 e^x - x^2\ dx = \int_1^2 xg(x)\ dx = [xG(x)]_1^2 - \int_1^2 G(x)\ dx = 2G(2) - J$ et donc $J = 2G(2) - I \approx$.

Exercice 125.
Exercice 126.
Exercice 127.

1. $A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\ dx = \left[\ln\left(1+e^x\right)\right]_0^1 = \ln(1+e) - \ln(2)$ et $B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\ dx = \left[-\frac{1}{1+e^x}\right]_0^1 = -\frac{1}{1+e} + \frac{1}{2}$.
2. $a = 1$ et $b = c = -1$ par identification polynomiale.
3. $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2}\ dx = \int_0^1 1 - \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\ dx = 1 - A - B = 1 - (\ln(1+e) - \ln(2)) - \left(-\frac{1}{1+e} + \frac{1}{2}\right) = 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) + \frac{1}{1+e} - \frac{1}{2}$.
4. (a) $J = \left[x \times \frac{-1}{2} \times \frac{1}{(1+e^x)^2}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2}\ dx = -\frac{1}{2(1+e)^2} + \frac{1}{2}I$.
   (b) $J = \frac{-1}{2(1+e)^2} + \frac{1}{2}\left(1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) + \frac{1}{1+e} - \frac{1}{2}\right)$.

Exercice 128. $f \leqslant g$ sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ donc $\mathscr{A} = \int_{1/2}^1 g(t) - f(t)\ dt = \int_{1/2}^1 \frac{3}{t}\ dt = 3\ln(2)$.

Exercice 129. $f(x) - g(x) = 2x^2 - 2x - 4 = 2(x+1)(x-2)$. $f - g \leqslant 0$ sur $[1;2]$ et $f - g \geqslant 0$ sur $[2;3]$ donc $\mathscr{A} = -\int_1^2 f(x) - g(x)\ dx + \int_2^3 f(x) - g(x)\ dx = -\left[\frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x\right]_1^2 + \left[\frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x\right]_2^3$.

Exercice 130.

1. $f(x) - (x-3) = e^{-2x}$ donc $\lim_{x\to\infty} f(x)(x-3) = 0$ et par conséquent $\mathscr{D}$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.
2. $f(x) - (x-3) = e^{-2x} > 0$ donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{D}$.
3. $\mathscr{A} = \int_1^{\ln(2)} f(x) - (x-3)\ dx = \int_1^{\ln(2)} e^{-2x}\ dx = \left[\frac{-1}{2}e^{-2x}\right]_1^{\ln(2)} = \frac{-1}{2}e^{-2\ln(2)} - \frac{-1}{2}e^{-2\times 1} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2}e^{-2}$.

Exercice 131.
Exercice 132.

1. (a) $\int_0^1 (1-x)^n\ dx = \left[-\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{n+1}(1-1)^{n+1} + \frac{1}{n+1}(1-0)^{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

(b) L'encadrement découle de la croissance de la fonction exponentielle sur $[0;1]$ et on en déduit, puisque $(1-x)^n \geqslant 0$, $(1-x)^n \leqslant (1-x)^n \mathrm{e}^x \leqslant (1-x)^n \mathrm{e}$. Par croissance de l'intégrale : $\int_0^1 (1-t)^n \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}\,\mathrm{d}t$. Avec la question précédente : $\frac{1}{n+1} \leqslant \int_0^1 (1-t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}$. En multipliant l'encadrement par $\frac{1}{n!}$ on peut conclure.

(c) D'après la question précédente et le théorème des gendarmes $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

2. (a) $I_0 = \frac{1}{0!}\int_0^1 \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^t\right]_0^1 = \mathrm{e}-1$, $I_1 = \frac{1}{1!}\int_0^1 (1-t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \left[(1-t)\mathrm{e}^t\right]_0^1 - \int_0^1 -1\times \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = -1 + \left[\mathrm{e}^t\right]_0^1 = \mathrm{e}-2$.

(b) $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}\left[\mathrm{e}^t(1-t)^n\right]_0^1 - \frac{1}{n!}\int_0^1 \mathrm{e}^t \times (-n)(1-t)^{n-1} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}\mathrm{e}^1(1-1)^n - \frac{1}{n!}\mathrm{e}^0(1-0)^n + \frac{n}{n!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = -\frac{1}{n!} + I_{n-1}$.

3. (a) Par télescopage $J_n = 1 + (I_1 - I_0) + (I_2 - I_1) + (I_3 - I_2) + \cdots + (I_n - I_{n-1}) = 1 + I_0 - I_n$.

(b) $J_n = 1 + \mathrm{e} - 1 - I_n$ et $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ donc $J = \mathrm{e}$.

(c) $J_n = e - I_n \Leftrightarrow J - J_n = I_n$ donc, d'après 1(b) : $\frac{1}{(n+1)!} \leqslant J - J_n \leqslant \frac{e}{(n+1)!}$.

Exercice 133.

1. $\mathscr{D}_f =]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ qui est symétrique par rapport à $-\frac{1}{2}$. Montrons que $f(x) = -f(-x-1)$. $f(-x-1) = -x-1+\frac{1}{2}+\ln\left(\frac{-x-1}{-x-1+1}\right) = -x-\frac{1}{2}+\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = -x-\frac{1}{2}-\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = -f(x)$.

2. $f'(x) = 1 + \frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}} = 1 + \frac{1}{(x+1)x}$ qui est strictement positif sur $]0,+\infty[$ et donc f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ donc asymptote verticale d'équation $x = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) - \left(x+\frac{1}{2}\right) = 0$ donc asymptote d'équation $y = x + \frac{1}{2}$. Pour le tracer on complète par symétrie par rapport à I.

3. $x + \frac{1}{2} - f(x) \geqslant 0$ donc on calcule $\int_1^\lambda x + \frac{1}{2} - f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^\lambda \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\,\mathrm{d}x = \int_1^\lambda \ln(x) - \ln(x+1)\,\mathrm{d}x = [x\ln(x)-x]_1^\lambda - [(x+1)\ln(x+1)-(x+1)]_1^\lambda = \lambda\ln(\lambda)-\lambda+1-(\lambda+1)\ln(\lambda+1)+(\lambda+1)+2\ln(2)-2$. Pour avoir l'aire en cm^2 reste à multiplier par 2^2.

Exercice 134.

Exercice 135.

Exercice 136.

Suites et séries.

7. Suites convergentes.

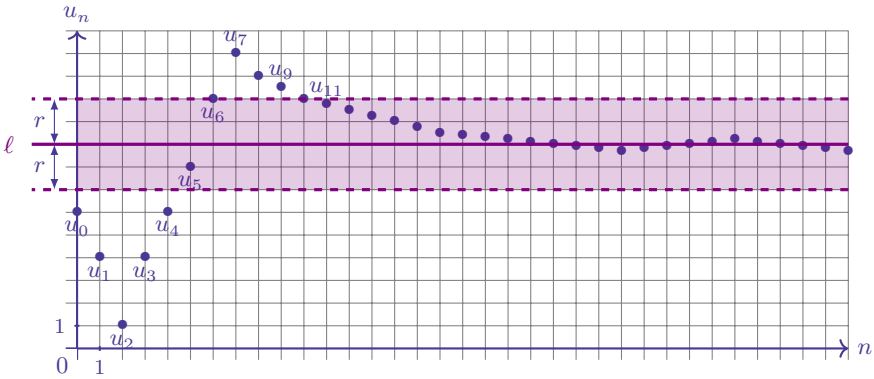
Nous nous intéressons aux suites dont les valeurs semblent se stabiliser lorsque n augmente.

I Définitions et vocabulaire.

Définition 19. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \mathbb{R}$. Nous dirons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ si et seulement si : quelque soit l'intervalle ouvert contenant ℓ, il contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

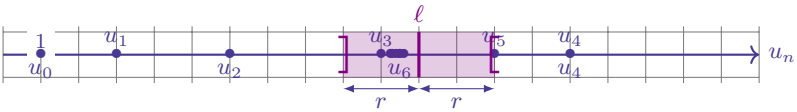
Remarques.

1. Lorsqu'une suite converge vers un réel ℓ nous dirons que *la suite converge* ou que *la suite est convergente* sans préciser la limite.
2. En cas de convergence nous dirons que ℓ est une *limite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et nous noterons : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
3. Lorsqu'une suite ne converge pas on dit qu'*elle diverge* ou qu'*elle est divergente*.
4. Lorsque nous serons confronté à une suite dont nous ne savons dire si elle converge ou diverge nous dirons que nous avons à faire à *une forme indéterminée* (c'est une dénomination spécifique au lycée).
5. Autrement dit si on délimite une petite zone autour de ℓ (en fait n'importe qu'elle zone) tous les points de la suite hormis un nombre fini d'entre eux sont dans cette zone.
6. La convergence est une propriété à l'infini qui ne dépend pas des premiers termes. Donc si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ alors $(u_n)_{n\geqslant 7}$ converge aussi vers ℓ.
7. Les intervalles ouverts doivent être imaginés comme des ensembles de plus en plus petit autour de ℓ. Aussi petit soit l'intervalle ouvert contenant ℓ il contiendra tous les termes de la suite hormis quelques uns (un nombre fini en tout cas). Il y a un aspect dynamique dans cette définition : on peut se rapprocher autant qu'on le veut de ℓ, ça ne change rien.
8. Les intervalles doivent être ouverts car, sauf si la suite est stationnaire, la valeur limite n'est pas atteinte, et donc l'intervalle fermé $[\ell;\ell]$ qui contient ℓ ne contient, en général, aucun terme de la suite.
9. Le plus souvent dans les démonstrations nous travaillerons avec des intervalles ouverts centrés sur la limite ℓ et de rayon r : $]\ell-r,\ell+r[$. Mais ceci ne change rien à la généralité des résultats.
10. Interprétation graphique typique pour une suite définie par une formule explicite.



À partir de u_{11} les termes de la suite sont tous dans l'intervalle ouvert $]\ell - r, \ell + r[$.

11. Interprétation graphique typique pour une suite définie par une formule de récurrence.



12. Cette définition est un outil (assez théorique c'est vrai) pour démontrer qu'une suite est convergente. Nous en verrons d'autres dans cette leçon.
13. Remarquons que la limite éventuelle d'une suite devra être conjecturée (merci la calculatrice).
14. C'est comme si la suite était infiniment bornée à l'infini.

Exemples.

1. Les suites constantes convergent et leurs limites sont leurs valeurs. Si (u_n) est la suite constante égale à 2 alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.
2. Toute suite stationnaire (constante à partir d'un certain rang) est convergente.
3. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0,\underbrace{33\ldots3}_{n \text{ chiffres } 3}$ une suite de nombres décimaux. Il es assez intuitif d'écrire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0{,}333\cdots = \frac{1}{3}$. L'idée se généralise : tout nombre est la limite de la suite de ses valeurs approchées.

II Suite des inverses.

Notons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. Nous avons déjà conjecturé en classe de première que cette suite converge vers 0. Démontrons-le.

Proposition 39. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Démonstration. Démontrons que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Soient a et b des réels tels que $a < 0 < b$. Ainsi $I =]a, b[$ est un intervalle ouvert contenant 0.

* Analyse.

Concrètement cette phase est une phase de recherche. On cherche la valeur du rang à partir duquel les termes de la suite sont dans l'intervalle I en faisant comme si on l'avait déjà trouvé.

Supposons que nous ayons trouvé un nombre entier N à partir duquel tous les termes de la suite sont dans I : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $n \geqslant N$, alors $u_n \in I$. Autrement dit :

$$a < u_n < b.$$

Donc : $\frac{1}{n} < b$, *i.e.*, la fonction inverse étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$: $n > \frac{1}{b}$.

* Synthèse.

Soit $N = \left\lfloor \frac{1}{b} + 1 \right\rfloor$.

Si nous prenons n plus grand que le rang N alors :

$$\begin{aligned} n &\geqslant N \\ n &\geqslant \left\lfloor \frac{1}{b} + 1 \right\rfloor \\ n &> \frac{1}{b} \end{aligned}$$

Puisque la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{1}{n} < b$$

Comme de plus $a < 0 < \frac{1}{n}$ nous avons bien : $a < \frac{1}{n} < b$.

Autrement dit : $\frac{1}{n} \in]a,b[$.

À partir du rang N tous les termes de la suite sont dans $]a,b[$.

Quel que soit l'intervalle I contenant 0 il existe un rang N à partir duquel tous les termes de la suite sont dans I.

Autrement dit, par définition :

$$\boxed{\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } 0.}$$

Remarques.

1. La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ n'est pas stationnaire. Les nombres $\frac{1}{n}$ ne sont jamais égaux à la limite 0. Ils s'en approchent indéfiniment.
2. C'est une première suite de référence dont il faut connaître par cœur la limite. Cette suite est appelée la suite des inverses.

III Suite inverse de racine carrée.

Proposition 40. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Démonstration. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Notons $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$ (magie...).

Démontrons que, à partir du rang N, tous les termes de la suite sont dans $]-\varepsilon,\varepsilon[$.

Soit $n \geqslant N$.

$n \geqslant N > \frac{1}{\varepsilon^2} > 0$ donc, la fonction racine carrée étant strictement croissante, $\sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon} > 0$. La fonction inverse étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$. Comme de plus $\frac{1}{\sqrt{n}} > 0 > -\varepsilon$ nous avons bien $\frac{1}{\sqrt{n}} \in]-\varepsilon,\varepsilon[$.

$$\boxed{\text{Nous avons démontré que } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.}$$

IV Unicité de la limite.

Proposition 41. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, ℓ_1 et ℓ_2 des nombres réels. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1 et ℓ_2, alors $\ell_1 = \ell_2$.

Démonstration. Nous allons utiliser un procédé très classique pour démontrer l'unicité d'un objet mathématique : nous allons supposer qu'il en existe deux, *a priori* distincts, et démontrer qu'ils sont nécessairement égaux.

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1 et ℓ_2.

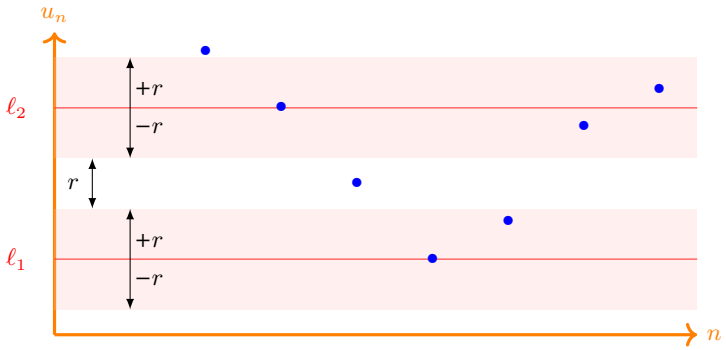
Démontrons que $\ell_1 = \ell_2$ en raisonnant par l'absurde.

Supposons donc que $\ell_1 < \ell_2$ et démontrons que cela conduit à une contradiction.

Soit $r = \frac{1}{3}(\ell_2 - \ell_1)$.

L'idée est que nous devrions avoir tous les points de la suite (hormis un nombre fini d'entre eux) dans deux intervalles disjoints ce qui est impossible.

Ci-dessous une représentation graphique des deux intervalles que nous allons considérer : $]\ell_1 - r, \ell_1 + r[$ et $]\ell_2 - r, \ell_2 + r[$.



Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1, à partir d'un certain rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tous les termes de la suite sont dans l'intervalle ouvert $]\ell_1 - r, \ell_1 + r[$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant N_1$ alors

$$\ell_1 - r < u_n < \ell_1 + r.$$

Autrement dit tous les termes de la suite, hormis les premiers, sont dans la zone colorée en rose autour de ℓ_1.

De la même façon il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ un rang à partir duquel pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $n \geqslant N_2$ alors :

$$\ell_2 - r < u_n < \ell_2 + r.$$

Autrement dit tous les termes de la suite, hormis les premiers, sont dans la zone colorée en rose autour de ℓ_2.

Mais donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant \max(N_1, N_2)$, alors : $u_n < \ell_1 + r < \ell_2 - r < u_n$.

Autrement dit : $u_n < u_n$, ce qui est impossible.

Nous avons donc démontré par l'absurde que, nécessairement $l_1 = l_2$.

Autrement dit

la limite d'une suite convergente est unique.

Remarques.

1. Ce résultat démontre l'unicité de la limite d'une suite.

2. Nous pourrons donc maintenant parler de la limite d'une suite.
3. Ce résultat permet également, grâce à sa contraposée, d'établir que certaines suites ne sont pas convergentes : si la suite des termes de rangs pairs et celle des termes de rangs impairs ne converge pas vers la même limite alors la suite ne converge pas (et même elle n'a pas de limite). Vous aurez extrêmement rarement à démontrer qu'une suite n'a pas de limite.

V Suite bornée.

Définition 20. Soit $p \in \mathbb{N}$. Nous dirons qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant p}$ est *bornée* si et seulement si il existe un encadrement de u_n valable quel que soit $n \geqslant p$. Autrement dit il existe des réels m et M tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant u_n \leqslant M$.

Remarques.

1. Dans ce cas m est appelé *un minorant* de la suite et M *un majorant*. Attention minorant et majorant ne sont pas nécessairement des minima et maxima.

Proposition 42. Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Soit (u_n) une suite convergeant vers un réelle ℓ.

Soient a et b des réels tels que $a < \ell < b$.

$]a,b[$ est un intervalle ouvert contenant ℓ donc, par définition de la convergence, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel tous les termes de la suite sont dans $]a,b[$. Donc les termes u_n pour $n \geqslant N$ sont bornés par a et b.

Si maintenant $0 \leqslant n < N$ alors les u_n sont mieux que bornés : ils ont un maximum M et un minimum m, car il y en a un nombre fini.

Le majorant global est donc $\max(M,b)$ et le minorant $\min(m,a)$.

Proposition 43. La suite $(-1)^n$ est bornée mais divergente.

Démonstration. $-1 \leqslant (-1) \leqslant 1$ et les suites de termes de rangs pairs et impaires converge vers de limites différentes ce qui contredirait l'unicité de la limite donc elle diverge.

Remarques.

1. Ce résultat démontre que la réciproque de la précédente proposition est fausse. Toutes les suites bornées ne sont pas forcément convergente.

VI Opérations sur les limites.

Proposition 44. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $(u_n)_{n \geqslant p}$ et $(v_n)_{n \geqslant q}$ deux suites convergeant respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2 des réels.

(i) $\lim_{n \to +\infty} u_n + v_n = \ell_1 + \ell_2$.
(ii) $\lim_{n \to +\infty} \alpha u_n = \alpha \ell_1$.
(iii) $\lim_{n \to +\infty} u_n v_n = \ell_1 \ell_2$.
(iv) Si (v_n) ne s'annule pas et si $\ell_2 \neq 0$ alors, $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$.

Remarques.

1. Les opérations sur les suites convergentes se traduisent par les mêmes opérations sur les limites (sauf la division par 0 bien entendu).
2. Les deux premiers points établissent que l'ensemble des suites convergentes est stable par combinaisons linéaires et donc que c'est un espace vectoriel.
3. Notons et retenons une forme indéterminée : si (v_n) ne s'annule pas et si $\ell_2 = 0$ alors, $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = ?$.

4. En combinant ce résultat et l'unicité de la limite nous remarquons que si $\lim_{n\to+\infty} u_n - \ell = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$. En prenant en compte le théorème des gendarmes si $\lim_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Ce sont des façons de montrer la convergence assez communes.

Exemples.

1. En considérant la suite des inverses et une suite constante égale à -7 nous pouvons donc affirmer : $\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n} - 7 = 3 \times 0 - 7 = -7$.
2. $\left(-\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 (obtenue en multipliant par -1.
3. Par contre nous ne pouvons a priori rien dire pour la suite $\left(\frac{1}{n} \div \frac{1}{n}\right)$: c'est une forme indéterminée. Cependant en modifiant l'écriture, $\frac{1}{n} \div \frac{1}{n} = 1$, nous voyons qu'il s'agit en fait d'une suite constante donc convergente vers 1. Si la limite du dénominateur est nulle il faudra essayer de lever l'indétermination sur la limite par d'autres biais (comme ici une ré-écriture de la formule). C'était déjà ce procédé que vous utilisiez pour les limites de taux d'accroissement en première.
4. Notons $u_n = \frac{\left(3+\frac{1}{n}\right)^2 - 3^2}{\frac{1}{n}}$ pour $n \geqslant 1$. u_n est un taux d'accroissement de la fonction carré entre 3 et $3 + \frac{1}{n}$. On retrouve comme l'année dernière une forme indéterminé (division par zéro) mais nous pouvons lever l'indétermination en écrivant : $u_n = \frac{9+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}-9}{\frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n}\left(6+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 6 + \frac{1}{n}$. Or $\lim_{n\to+\infty} 6 + \frac{1}{n} = 6$.
5. $\frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{\sqrt{n}}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{n}$ donc par produit $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = 0$.

Proposition 45. Soit $m \in \mathbb{N}$. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^m} = 0$.

Démonstration. $\frac{1}{n^m} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \times \cdots \times \frac{1}{n}$ et on utilise la précédente proposition.

Remarques.

1. Les suites $\left(\frac{1}{n^m}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ font maintenant partie des suites de références dont nous pourrons utiliser la limite sans la justifier.

Exercice 137. Calculez la limite de la suite dont on donne un terme général dans chaque cas.

a) $\frac{1}{n} + 4$.
b) $\frac{3}{n} - 13$.
c) $\frac{1}{\sqrt{n}n^2}$.
d) $\frac{4}{\sqrt{n}} + \frac{8}{n^2}$.
e) $\frac{1}{13n^2}$.
f) $1 + \frac{-6}{7n^8}$.
g) $\frac{8-\frac{1}{n^2}}{-6}$.
h) $\frac{1}{n^3}\left(2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)$.
i) $\frac{-6+\frac{4}{n}-\frac{2}{n^2}}{7-\frac{1}{n}}$.

Dans l'exercice qui suit nous allons voir et mettre en œuvre une astuce algébrique pour lever l'indétermination dans certains calculs : factoriser par la plus grande puissance de n.

Exercice 138. Modifiez l'écriture du terme général pour déterminer la limite de la suite.

a) $\frac{n^3}{n^9}$.
b) $\frac{\sqrt{n}}{n}$.
c) $\frac{n^2-6\sqrt{n}+7}{-5n^2+n\sqrt{n}}$.
d) $\frac{n^2+6n+3}{n^3-5n-12}$.
e) $\frac{3n^4-n+1}{5n^4+4n^3+n^2+3}$.
f) $\frac{-7n^2+n-12}{n^7}$.

VII Comparaison de limites.

Proposition 46. Soient $(p,q,r) \in \mathbb{R}^3$, $(u_n)_{n\geqslant p}$, $(v_n)_{n\in\geqslant q}$ et $(w_n)_{n\geqslant r}$ trois suites convergentes. Si pour un certain rang $N \in \mathbb{N}$ on a : $\forall n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} w_n$.

Remarques.

1. Même si l'encadrement est stricte sur les suites l'encadrement sur les limites est forcément large comme le montre cet exemple : $1 - \frac{1}{n} < 1 < 1 + \frac{1}{n}$ et pourtant $\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$.

Proposition 47. Soient $(p,q,r) \in \mathbb{R}^3$, $(u_n)_{n\geqslant p}$, $(v_n)_{n\in\geqslant q}$ et $(w_n)_{n\geqslant r}$ trois suites. Si $(u_n)_{n\geqslant p}$ et $(w_n)_{n\geqslant r}$ converge vers une même limite ℓ et si, pour un certain rang $N \in \mathbb{N}$, on a : $\forall n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Démonstration. Soient a et b deux réels tels que $a < \ell < b$.

Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $u_n \in]a,b[$.

De même il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $w_n \in]a,b[$.

Donc à partir du rang $N = \max(N_1,N_2)$, $u_n \in]a,b[$ et $v_n \in]a,b[$.

Puisque $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, forcément $v_n \in]a,b[$.

Ainsi quel que soit l'intervalle ouvert $]a,b[$ contenant ℓ, à partir d'un certain rang, cet intervalle contient tous les termes de la suite (v_n).

$$\boxed{(v_n) \text{ converge vers } \ell.}$$

Remarques.

1. Ce résultat est appelé *théorème des gendarmes* (ou des sandwichs).
2. Ce résultat permet de déterminer des limites pour des suites dont éventuellement on ne connaît pas la formule explicite ou du moins qui ne s'exprime pas comme des sommes ou produit de suites de référence.

Exemples.

1. $\left(\frac{\cos(n)}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ semble difficile à étudier mais nous savons que $-1 \leqslant \cos(n \leqslant 1$ donc $-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\cos(n)}{n} \leqslant \frac{1}{n}$. Or $\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{n} = 0$.

Exercice 139. Démontrez que $\left(\frac{(-1)^n}{n^7}\right)_{n\geqslant 1}$ converge et précisez sa limite.

Exercice 140. Démontrez que $\left(\frac{\sin(n^2+1)}{n^4}\right)_{n\geqslant 1}$ converge et précisez sa limite.

VIII Théorème de la limite monotone.

Théorème 5. Toute suite croissante (respectivement décroissante) et majorée par un réel M (resp. minorée par un réel m) est convergente vers un réel ℓ et $\ell \leqslant M$ (resp. $m \leqslant \ell$).

Démonstration. $\{u_n \mid n \geqslant p\}$ est une parti non vide est majorée de $\mathbb{R}$ donc admet une borne supérieure ℓ. Reste à démontrer que la suite converge vers ℓ.

Remarques.

1. Comme beaucoup de théorèmes d'existence, c'est un résultat très important. Grâce à ce théorème on pourra savoir si les suites monotones converges ou pas même si nous ne sommes pas capable de trouver la limite de cette suite.
2. L'utilisation de ce résultat se prolonge en général par une recherche d'encadrement de la limite par divers procédés notamment algorithmiques ou une utilisation du théorème du point fixe.
3. En général la limite n'est pas le majorant ou le minorant : $\ell \neq M$ et $\ell \neq m$. Si c'est le cas il faut le démontrer en plus.
4. Nous utiliserons tout particulièrement ce résultat pour les suites définies par récurrences pour lesquelles nous pourrons pas utiliser les opérations sur les limites.

5. Même si l'on dispose d'une minoration stricte : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n$, on ne peut en déduire qu'une minoration large de la limite : $1 \leqslant \ell$.

Exemples.

1. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie, quel que soit $n \geqslant 1$, par $u_n = \frac{2n+1}{n+3}$ est croissante et majorée (démontrable algébriquement) par 3 donc elle converge vers un réel ℓ et $\ell \leqslant 3$. Nous verrons bientôt que sa limite n'est pas trois mais 2.
2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $v_0 = 0{,}1$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 1{,}6v_n - 1{,}6v_n^2$. Nous avons déjà démontré par récurrence que $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$. Nous en déduisons que la suite et croissante et majorée par $\frac{1}{2}$, et donc, qu'elle converge vers un réels ℓ tel que $\ell \leqslant \frac{1}{2}$.

Exercice 141. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
2. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donnez un minorant de la limite.

Exercice 142. Posons $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$.

1. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3 \geqslant u_{n+1} \geqslant u_n \geqslant 0$.
2. Déduisez-en que (u_n) converge.

IX Exercices.

Exercice 143. On définit les suites $u_n = 1 + \frac{1}{n}$, $v_n = 2 - \frac{1}{n^2}$, $x_n = 3 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$ et $y_n = 2 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminez les limites des différentes suites.
2. En remarquant que $x_n = u_n + v_n$ et $y_n = u_n v_n$ expliquez la propriété que nous avons vérifiée sur ce cas particulier.

Exercice 144. La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 \in [0;2] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n} \end{cases}$.

1. Montrez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;2]$.
2. Calculez $u_{n+1} - u_n$ et montrez que la suite (u_n) est croissante (utilisez la quantité conjuguée).
3. Montrez que (u_n) est convergente.

Exercice 145. La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 \in [0;1] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2} \end{cases}$.

1. Montrez par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$.
2. Étudiez le signe de $u_{n+1} - u_n$. Que pouvez-vous en déduire,

Exercice 146. Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que pour tout entier naturel n : $\begin{cases} 0 \leqslant u_n \leqslant 1 \\ 0 \leqslant v_n \leqslant 1 \end{cases}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 1$. Démontrez que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et que $\lim\limits_{n+\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

— Bac 2024/05/22 Amérique du Nord sujet 2 exercice 3 jusqu'à la question 5.
— Bac 2024/06/05 Centres étrangers sujet 1 exercice 2 jusqu'à la question 2.
— Bac 2024/06/06 Centres étrangers sujet 2 exercice 2 jusqu'à la question B2.
— Bac 2024/06/19 Métropole sujet 1 exercice 1 affirmations 3 et 4.

— Bac 2024/06/20 Métropole sujet 2 dévoilé exercice 3 partie A (sans déterminer la limite).
— Bac 2024/06/19 Polynésie sujet 1 exercice 4 sauf déterminer la limite à la question 4.
— Centres étrangers groupe 2 sujet 1 21 mars 2023. Arbre probabiliste, suites, limites.
— Baccalauréat S Métropole 23 juin 2009

X Corrections.

Exercice 137.

a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + 4 = 4$.
b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n} - 13 = -13$.
c) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}n^2} = 0$.
d) $\lim_{n\to+\infty} \frac{4}{\sqrt{n}} + \frac{8}{n^2} = 0$.
e) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{13n^2} = 0$.
f) $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{-6}{7n^8} = 0$.
g) $\lim_{n\to+\infty} \frac{8-\frac{1}{n^2}}{-6} = -\frac{4}{3}$.
h) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}\left(2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = 0$.
i) $\lim_{n\to+\infty} \frac{-6+\frac{4}{n}-\frac{2}{n^2}}{7-\frac{1}{n}} = -\frac{6}{7}$.

Exercice 138.

a) $\frac{n^3}{n^9} = \frac{1}{n^6}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{n^9} = 0$.
b) $\frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$.
c) $\frac{n^2-6\sqrt{n}+7}{-5n^2+n\sqrt{n}} = \frac{n^2\left(1-6\frac{1}{n}\times\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{7}{n^2}\right)}{n^2\left(-5+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{1-6\frac{1}{n}\times\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{7}{n^2}}{-5+\frac{1}{\sqrt{n}}}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-6\sqrt{n}+7}{-5n^2+n\sqrt{n}} = . -\frac{1}{5}$.
d) $\frac{n^2+6n+3}{n^3-5n-12} = \frac{1}{n}\frac{1+\frac{6}{n}+\frac{3}{n^2}}{1-\frac{5}{n}-\frac{12}{n^2}}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+6n+3}{n^3-5n-12} = 0$.
e) $\frac{3n^4-n+1}{5n^4+4n^3+n^2+3} = \frac{3-\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}{5+4\frac{1}{n}+\frac{3}{n^4}}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^4-n+1}{5n^4+4n^3+n^2+3} = \frac{3}{5}$.
f) $\frac{-7n^2+n-12}{n^7} = \frac{1}{n^5} \times \frac{-7+\frac{1}{n}-\frac{12}{n^2}}{1}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{-7n^2+n-12}{n^7}$.

Exercice 139. $-\frac{1}{n^7} \leqslant \frac{(-1)^n}{n^7} \leqslant \frac{1}{n^7}$, $\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n^7} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^7} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n^7} = 0$.

Exercice 140. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ donc : $-\frac{1}{n^4} \leqslant \frac{\sin(n^2+1)}{n^4} \leqslant \frac{1}{n^4}$. De plus $\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n^4} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n^2+1)}{n^4} = 0$.

Exercice 141.

1. Démonstration par récurrence. $u_0 = 8$ et $u_1 = \frac{1}{2}\times 8 + 2 = 6$ donc $4 \leqslant u_1 \leqslant u_0$. $x \mapsto \frac{1}{2}x + 2$ étant une fonction affine strictement croissante si $4 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ alors $f(4) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$. Et on conclue car $f(4) = 4$.
2. Puisque : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   Puisque : $\forall n \in \mathbb{N}$, $4 \leqslant u_n$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée.
   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 4 donc, d'après le théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ tel que $4 \leqslant \ell$.

Exercice 142.

1. $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{6+0} = \sqrt{6}$ donc $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 3$. $x \mapsto \sqrt{6+x}$ étant croissante sur $[-6, +\infty[$, si $3 \geqslant u_{n+1} \geqslant u_n \geqslant 0$ alors $f(3) \geqslant f(u_{n+1}) \geqslant f(u_n) \geqslant f(0)$. On conclu avec $f(3) = 3$ et $f(0) = \sqrt{3} \geqslant 0$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $3 \geqslant u_n$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 3.
   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 3 donc, d'après le théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ et $3 \geqslant \ell$.

Exercice 143.

1. $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$, $\lim_{n\to+\infty} v_n = 2$, $\lim_{n\to+\infty} x_n = 3$, $\lim_{n\to+\infty} y_n = 2$.
2. Les résultats sur la limite d'une somme.

Exercice 144.

1. $0 \leqslant u_0 \leqslant 2$. Si $u_n \in [0;2]$ alors, $x \mapsto \sqrt{2x}$ étant croissante, $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(2)$.
2. $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{2} - \sqrt{u_n}) = \sqrt{u_n}\frac{2-u_n}{\sqrt{2}+\sqrt{u_n}} \geqslant 0$ donc (u_n) est croissante.
3. (u_n) est croissante est majorée par 2 donc convergente.

Exercice 145.

1. $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$. $f : x \mapsto \frac{2x+1}{x+2}$, $f'(x) = \frac{3}{x+2} > 0$ sur $[0;1]$. Si $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ alors f étant croissante : $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$ et $f(0) = \frac{1}{2} \geqslant 0$ et $f(1) = 1$.
2. $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n+1}{u_n+2} - u_n = \frac{2u_n+1-u_n(u_n+2)}{u_n+2}\frac{1-u_n^2}{u_n+2} = \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{u_n+2} \geqslant 0$ car $u_n \in [0;1]$.(u_n) est croissante et majorée par 1 donc, d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers un réel ℓ et $\ell \leqslant 1$.

Exercice 146. Puisque $0 \leqslant v_n \leqslant 1$ alors $u_n v_n \leqslant u_n \leqslant 1$. Puis on conclue avec le théorème de la limite monotone.

8. Suites divergentes, limite infinie.

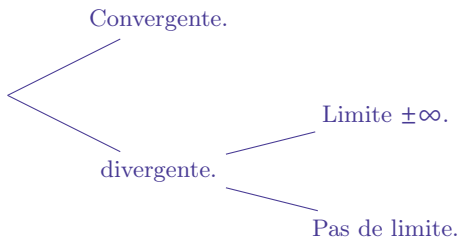
Nous allons nous intéresser à un cas particulier de suite divergente : lorsque la suite prend des valeurs infiniment grandes ou infiniment petites.

I Définition.

Définition 21. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Nous dirons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet pour limite* $+\infty$ (ou qu'elle *tend vers* $+\infty$) si et seulement si, : quelque soit $A \in \mathbb{R}$, $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Remarques.

1. Si (u_n) tend vers $+\infty$ on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. Nous avons également une définition de limite égale à $-\infty$. Nous dirons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet pour limite* $-\infty$ si et seulement si, : quelque soit $A \in \mathbb{R}$, $]-\infty,A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
3. On utilise le même terme limite mais la suite n'est pas pour autant convergente. La suite convergente se rapproche d'une valeur finie.
4. Quelque soit le majorant A supposé de la suite, on se rend compte qu'il n'y a qu'un nombre fini de termes qui soient plus petits.
5. Une suite qui tend vers $\pm\infty$ est un cas particulier de suite divergente. Voici un schéma qui résume les possibilités lors de l'étude de la convergence d'une suite.



Exemples.

1. Démontrons que la suite définie par $u_n = 3n$ tend vers $+\infty$.
   Soit $A \in \mathbb{R}$.
   Notons $N = \lfloor \frac{A}{3} \rfloor + 1$.
   Si $n \geqslant N$ alors $n \geqslant \lfloor \frac{A}{3} \rfloor + 1$ donc $3n \geqslant \lfloor \frac{A}{3} \rfloor + 1 > A$. Autrement dit $3n \in]A;+\infty[$. À partir du rang N tous les termes de la suite sont dans $]A,+\infty[$.
   Quelque soit le réel A l'intervalle $]A,+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Autrement dit :

$(3n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

II Suite des entiers.

Proposition 48. $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$.
Démonstration. C'est une tautologie.

Exercice 147. La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1} \end{cases}$..

1. Calculez u_2, u_3, u_4 et u_5.
2. Conjecturez une expression explicite de u_n, pour n entier supérieur à 1.
3. Démontrez la propriété conjecturée.
4. Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

III Suite des racines carrées.

Proposition 49. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
Démonstration. Soit $A \in \mathbb{R}_+$.
Notons $N = \lfloor A^2 \rfloor + 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N$.

$$n \geqslant N$$
$$n \geqslant \lfloor A^2 \rfloor + 1$$
$$n > A^2$$

Puisque la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$\sqrt{n} > A$$
$$\sqrt{n} \in]A, +\infty[$$

IV Unicité de la limite.

Proposition 50. Soient $p \in \mathbb{N}$, $(u_n)_{n\geqslant p}$, ℓ_1 et ℓ_2 des éléments de $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ (donc des réels ou des infinis). Si ℓ_1 et ℓ_2 sont des limites de $(u_n)_{n\geqslant p}$ alors $\ell_1 = \ell_2$.
Démonstration. Le cas ℓ_1 et ℓ_2 réels a déjà été vu. Si ℓ_1 est réel et ℓ_2 est infini alors raisonnement par l'absurde. De même si ℓ_1 et ℓ_2 sont des infinis de signe contraire.

V Suite bornée.

Proposition 51. Une suite admettant une limite infinie n'est pas bornée.
Démonstration. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une suite (u_n) bornée tendant vers $+\infty$ (par exemple mais on ferait de même pour $-\infty$).

* Puisque que (u_n) est bornée elle admet un majorant M : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$.

* Puisque (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, il existe un rang N tel que, pour tout $n \geqslant N$, $u_n > M$. Cette inégalité contredit celle obtenue au point précédent.

Nous avons démontré en raisonnant par l'absurde qu'une suite admettant une limite infinie ne peut être bornée.

VI Opérations sur les limites finies et infinies.

Proposition 52. Soient $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $(u_n)_{n\geqslant p}$ une suite convergeant vers une réel ℓ_1 et $(v_n)_{n\geqslant q}$ admettant pour limite $+\infty$.

(i) $\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$.
(ii) Si $\alpha > 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} \alpha u_n = +\infty$.
(iii) Si $\alpha < 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} \alpha u_n = -\infty$.
(iv) Si $\ell_1 > 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$.
(v) Si $\ell_1 < 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = -\infty$.
(vi) Si (u_n) ne s'annule pas et si $\ell_1 > 0$ alors, $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = +\infty$.
(vii) Si (u_n) ne s'annule pas et si $\ell_1 < 0$ alors, $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = -\infty$.
(viii) Si (v_n) ne s'annule pas alors, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

Démonstration.

Remarques.

1. La plupart de ces résultats relèvent du bon sens (« si ce nombre devient très grand et que je le multiplie par ... »). Ce qui est plus important c'est de bien connaître notre incompétence, ce qu'on appelle les formes indéterminées :
   (i) Si $\ell_1 = 0$ alors $u_n v_n = ?$.
   (ii) Si (u_n) ne s'annule pas et si $\ell_1 = 0$ alors, $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = ?$.
2. Il y a des résultats semblables pour la limite $-\infty$.

Exemples.

1. La suite de terme général $n + \frac{1}{n}$ tend vers $+\infty$.
2. La suite de terme général $\frac{2}{3}\sqrt{n}$ tend vers $+\infty$.
3. La suite de terme général $-\sqrt{n}$ tend vers $-\infty$.
4. $\lim_{n\to+\infty} \left(3 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) n = +\infty$.
5. $\lim_{n\to+\infty} \left(-5 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) n = -\infty$.
6. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{5+\frac{1}{n^2}} = +\infty$.
7. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2}+\sqrt{n}}{-7+\frac{1}{n^3}} = -\infty$.
8. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{n} = 0$.
9. $\frac{1}{n^2} \times n^3$ conduit à une forme indéterminée (une simplification algébrique suffit pour lever l'indétermination).

Exercice 148. Calculez les limites des suites suivantes.

a) $\frac{4n+3}{2+\frac{1}{n}}$.
b) $\frac{-2n}{1+\frac{1}{n^2}}$.
c) $(8+\sqrt{n})\left(-1+\frac{1}{n}\right)$.
d) $\frac{4}{\sqrt{n}+2}$.
e) $\frac{\frac{1}{n}}{3-n}$.
f) $n^{14} + \frac{2+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}$.

Exercice 149. Déterminez dans chaque cas la limite de la suite dont le terme général est donné (en levant éventuellement l'indétermination).

a) $n^4 \times \frac{1}{n^{12}}$.

b) $n^4 \times \frac{1}{n^2}$.

c) $\frac{1}{4n^2} \times n^2$.

VII Opérations sur les limites infinies.

Proposition 53. Soient $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $(u_n)_{n \geqslant p}$ et $(v_n)_{n \geqslant q}$. Si (u_n) et (v_n) tendent vers $+\infty$, alors $(u_n + v_n)$ tend vers $+\infty$. Si (u_n) et (v_n) tendent vers $-\infty$, alors $(u_n + v_n)$ tend vers $-\infty$.

Remarques.

1. Par contre la somme de suites tendant vers des infinis opposés conduit à des formes indéterminées. Il faut absolument connaître les situation de formes indéterminées.

Proposition 54. Soient $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $(u_n)_{n \geqslant p}$ une suite tendant vers un infini et $(v_n)_{n \geqslant q}$ une suite tendant vers un infini. $(u_n v_n)$ tend vers $+\infty$ si (u_n) et (v_n) ont des limites de même signe, sinon $(u_n v_n)$ tend vers $-\infty$.

Remarques.

1. Par contre $\frac{u_n}{v_n}$ correspond à des formes indéterminées.

Exemples.

1. $\lim_{n \to +\infty} n\sqrt{n} = +\infty$.
2. $\lim_{n \to +\infty} n \times (-3\sqrt{n}) = -\infty$.

Proposition 55. Soit $m \in \mathbb{N}$. $\lim_{n \to +\infty} n^m = +\infty$.

VIII Lever une indétermination : factoriser par la plus grande puissance de n.

Nous avons déjà évoqué cette astuce qui consiste factoriser par la fonction dominante en terme de croissance pour faire apparaître des croissances comparées. On l'utilise pour des divisions d'infinis ou des sommes d'infinis de signe opposé.

Cette astuce est notamment mise en œuvre avec des expressions polynomiales ou des fractions rationnelles.

Exemples.

1. Si $u_n = n^3 - n$ alors *a priori* c'est une forme indéterminée. Factorisons par n^3 : $u_n = n^3\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$. Avec cette expression il n'y a plus de forme indéterminée : $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
2. $u_n = \frac{2n+1}{3n+7}$ correspond à une forme indéterminée, mais, en factorisant par n au numérateur et au dénominateur : $u_n = \frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{7}{n}}$.
   Or $\lim_{n \to +\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2$ et $\lim_{n \to +\infty} 3 + \frac{7}{n} = 3$ donc (u_n) converge et $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{2}{3}$.

Exercice 150. Déterminez les limites des suites suivantes.

a) $u_n = n^2 + n + \dfrac{1}{n}$.

b) $u_n = \sqrt{n}\left(n^2 - \dfrac{1}{n^2}\right)$.

c) $u_n = \dfrac{4}{\sqrt{n} + n}$.

d) $u_n = n^3 + n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

e) $u_n = 5n^2 + 3n\sqrt{n}$.

f) $u_n = \sqrt{n}(2 - n - 2n^2)$.

g) $u_n = \dfrac{1}{n^2+n-1}$.

h) $u_n = n^2\left(\dfrac{2}{n+1}-1\right)$.

i) $u_n = \dfrac{3}{n}\left(\dfrac{3}{n^3}-5\right)$.

j) $u_n = \dfrac{3}{1-2n} - \dfrac{2}{1-3n}$.

k) $u_n = 2 - \dfrac{3}{6+\sqrt{n}}$.

l) $u_n = 2 - n\sqrt{5n} + \dfrac{1}{n^2+1}$.

m) $u_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

n) $u_n = n(n-4)(1-\sqrt{n})$.

IX Lever une indétermination : limite inverse en zéro.

Proposition 56. Soient $p \in \mathbb{N}$, $(u_n)_{n\geqslant p}$ une suite dont tous les termes sont non nuls. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et si, quelque soit $n \geqslant p$, $u_n > 0$ (respectivement $u_n < 0$) alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$ (resp. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = -\infty$).

Exemples.

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n^2}} = +\infty$ car $\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n} = 1$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n^2} = 0$ et $\frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n^2}} > 0$ pour $n > 0$.

Remarques.

1. Il existe une notation pour signifier que la suite est à termes et tend vers 0 : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0^+$. De même si la suite tend vers 0 par valeurs négatives on notera : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0^-$.

X Comparaison de limites.

Proposition 57. Soient $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $(u_n)_{n\geqslant p}$ et $(v_n)_{n\geqslant q}$ deux suites. Si, à partir d'un certain rang, quel que soit n, $u_n \leqslant v_n$ et si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Remarques.

1. On a un résultat semblable pour une suite majorée par une suite tendant vers $-\infty$.

Exercice 151. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2+1$.

1. Montrez que pour tout entier $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 2^n$.
2. Déduisez-en la limite de (u_n).

Exemples.

1. Nous l'utiliserons dans la démonstration de la limite d'une suite géométrique (confer infra).

XI Théorème de la limite monotone.

Proposition 58. Soient $p \in \mathbb{N}$, $(u_n)_{n\geqslant p}$. Si $(u_n)_{n\geqslant p}$ est croissante (respectivement décroissante) et non majorée (resp. non minorée) alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (resp. $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$).

XII Suites géométriques-exponentielles.

Proposition 59. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}$.

(i) Si $q \in \{0;1\}$ alors $(q^n)_{n\geqslant p}$ est convergente.

(ii) Si $q \in]1,+\infty[$ alors $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(iii) Si $q \in]0;1[$ alors $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration.

(i) Si $q = 0$ alors (q^n) est la suite nulle qui converge vers 0. Si $q = 1$ alors (q^n) est la suite constante égale à 1 qui converge vers 1.

(ii) Nous avons vu l'inégalité de Bernoulli : $\forall (x,n) \in]-1,+\infty[\times\mathbb{N}$, $(x+1)^n \geqslant 1+nx$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q > 1$. Pour $x = q-1$: $q^n = ((q-1)+1)^n \geqslant 1+n(q-1)$. Or $q-1 > 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} 1+n(q-1) = +\infty$ puis par comparaison des limites : $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

(iii) Si $q \in]0;1[$ alors $\frac{1}{q} > 1$ et donc $\lim_{n\to+\infty} q^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{q}\right)^n} = 0$.

Exemples.

1. $\lim_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0$.
2. $\lim_{x\to+\infty} 2^n = +\infty$.
3. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.
4. $\frac{2^n+1}{3^n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3^n}}$ donc $\lim_{n\to+\infty} 0$.

Remarques.

1. Nous avons vu qu'une suite géométrique est définie par une formule de récurrence mais nous savons aussi qu'elle est donnée par une formule explicite : $u_n = u_p q^{n-p}$. C'est à cause de cette dernière expression que la proposition peut être considéré comme décrivant toutes les suites de raison positive.
2. Nous pourrons comme pour les suites puissances lever l'indétermination en factorisant par la suite géométrique de raison la plus grande.

Exercice 152. Déterminez la limite de la suite (u_n) sachant que pour tout entier naturel n $4-0{,}9^n \leqslant u_n \leqslant 4+0{,}1^n$.

Exercice 153. Étudiez la convergence de la suite définie sur $\mathbb{N}$ par le terme général donné dans les différents cas suivants. *Il faut dans chaque cas lever l'indétermination en factorisant par la suite géométrique de plus grande raison.*

a) $\frac{7^n}{3^n}$. b) $\frac{3^n}{5^n}$. c) $\frac{2^n+1}{3^n}$. d) $\frac{7^n}{4^n+10^n}$. e) $\frac{5^n+13^n}{7^n+11^n}$.

Proposition 60. $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$.

XIII Lever une indétermination : croissance comparée.

Proposition 61.

(i) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = 0$.

(ii) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^m} = 0$ avec $m \in \mathbb{N}^*$.

(iii) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^m}{q^n} = 0$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ et $q > 1$.

(iv) $\lim_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$ avec $q > 1$.

Remarques.

1. Ce résultat permet de lever des indéterminations du type "infini divisé par infini".
2. Cette proposition se mémorise en y voyant une échelle de croissance de plus en plus forte vers $+\infty$. La croissance vers $+\infty$ de $(\ln(n))$ est négligeable par rapport à celle $(\sqrt{(n)})$. Celle de $(\sqrt{(n)})$ est négligeable devant celle (n^m). Et cetera.
3. Par transitivité (ou produit des termes généraux) on remarque, par exemple, que $(\ln(n))$ est négligeable par rapport à (q^n).

4. Cette comparaison se fait via des quotients et pour utiliser cette proposition il faudra souvent factoriser dans les expressions que nous utiliserons par une suite prépondérante.

Exemples.

1. $\lim_{n\to+\infty} 0{,}5^n n^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$.
2. $0{,}5^n(n^2+n-1) = 0{,}5^n n^2\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\lim_{n\to+\infty} 0$.

Exercice 154. Étudiez la convergence des suites dont on donne le terme général.

a) $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{2^n}$.
b) n^2-6^n.
c) $\sqrt{n^{-1}}+n!$.
d) $2^{-n}+\sqrt{n}$.
e) $n^{12}+\dfrac{1}{n^{100}}$.
f) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}+n!+1$.
g) $n^2 3^n$.
h) $\dfrac{n^2}{n^{12}}$.
i) $\dfrac{n!}{2^n}$.
j) $n^{-2}\left(\dfrac{5}{4}\right)^n$.
k) $\dfrac{n^{-3}}{\sqrt{n}}$.
l) $n^5 2^{-n}$.
m) $n^{-3}+0{,}5^n\sqrt{n}$.
n) $\dfrac{1}{n^4}\times e^n+4$.
o) $\dfrac{\sqrt{n}}{e^n}$.

XIV Exercices.

Exercice 155. Déterminez si elles existent les limites des suites sont on donne le terme général.

a) $\dfrac{(-1)^n}{n}$;
b) $\dfrac{\cos(n)}{n^2}$;
c) $\dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$;
d) $\dfrac{1}{n}+3^n$;
e) $\dfrac{\sin(n)}{n^3}$;
f) $\dfrac{1}{6^n}$.
g) $0{,}5^n+\sqrt{n}$.
h) $-n^3-2n^2$.
i) n^2+4n+1.
j) $1+\left(\dfrac{1}{6}\right)^n+n^3$.
k) $n+(-1)^n+1$;
l) $n^2-\sin(n)+1$;
m) $\sin\left(\sqrt{\cos(n^n)}\right)-n$.
n) $n!+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
o) $n!+\sqrt{n}$.
p) $\left(\dfrac{99}{100}\right)^n\sin(n)$.
q) $n^2+2n+(-1)^n n$.
r) $5-\dfrac{\sin(n^2)}{\sqrt{n}}$.

Exercice 156. Posons, pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geqslant 2$: $u_n = 1+\frac{1}{n+(-1)^n}$.

1. Montrez que, pour tout entier n tel que $n\geqslant 2$ on a : $\frac{1}{n+1}\leqslant u_n-1\leqslant\frac{1}{n-1}$.
2. Déterminez les limites des suites de termes généraux : $\frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{n-1}$.
3. Concluez quant à la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 157. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0=1$ et : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n+2n+3$.

1. Écrivez un algorithme permettant de calculer les termes $u_0,\ldots,u_n$, où n est un entier saisi à la demande.
2. Programmez le précédent algorithme, exécutez-le puis donnez les termes u_1 à u_{10}.
3. Étudiez la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. (a) Démontrez que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.
   (b) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

5. Conjecturez une expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n nombre entier naturel, puis démontrez la propriété ainsi conjecturée.

Exercice 158. Déterminez, si possible la limite des suites dont le terme général est donné ci-dessous.

a) $n^7 + 12$.

b) $4^n - 7$.

c) $n^3 + \dfrac{0{,}1^n}{\sqrt{n}}$.

d) $\dfrac{1}{n} + 4$.

e) $n^{-4} + \sqrt{n}$.

f) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 2 + \dfrac{1}{n^2}$.

g) $n!n^2 + 2 - \dfrac{1}{n^2}$.

h) $\dfrac{\sqrt{n}}{2 + \mathrm{e}^{-n}}$.

i) $\dfrac{n^4 + 1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 4}$.

j) $\dfrac{n \times 2^n}{3 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}}$.

k) $n! - \left(2 - n^2\right)$.

l) $n^2\left(n^3 + \dfrac{3}{\sqrt{n}} + 1\right)$.

m) $2n^3 + 5n^2 + n - 12$.

n) $-5n^3 - 2n^2 - 12n - 3$.

o) $4n^2 - n + 1$.

p) $\dfrac{n^3}{n^2}$.

q) $n^2 + 3^n + 4 - \dfrac{1}{n}$.

Exercice 159. Déterminez les limites en levant l'indétermination.

a) $u_n = n^3 - n + 5$.

b) $u_n = n^4 - n^2 + 1$.

c) $u_n = 3n\sqrt{n} - 2n^3$.

d) $u_n = \dfrac{n-3}{n+1}$.

e) $u_n = \dfrac{n^2 - \sqrt{n}}{n+3}$.

f) $u_n = \dfrac{n^2 - n + 4}{3n^2 - 2n + 5}$.

g) $u_n = n^2 - 3n$.

h) $u_n = 4n^3 - 3n^2 + 2$.

i) $u_n = 3n^4 - 3n^3 - 2n + 1$.

j) $u_n = \dfrac{4n-1}{3n+1}$.

k) $u_n = \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$.

l) $u_n = \dfrac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + n + 1}$.

m) $u_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n}$.

n) $u_n = \sqrt{4n^2 + n + 3} - 2n$.

o) $u_n = n - \dfrac{n^2}{n+1}$.

p) $u_n = \dfrac{n-3}{2n+1} - \dfrac{n+3}{3n-1}$.

q) $u_n = \dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{n^2}{n+2}$.

Exercice 160. Dans une région touristique, une société propose un service de location de vélos pour la journée. La société dispose de deux points de location distincts, le point A et le point B. Les vélos peuvent être empruntés et restitués indifféremment dans l'un où l'autre des deux points de location. On admettra que le nombre total de vélos est constant et que tous les matins, à l'ouverture du service, chaque vélo se trouve au point A ou au point B. D'après une étude statistique :

- Si un vélo se trouve au point A un matin, la probabilité qu'il se trouve au point A le matin suivant est égale à 0,84 ;
- Si un vélo se trouve au point B un matin la probabilité qu'il se trouve au point B le matin suivant est égale à 0,76.

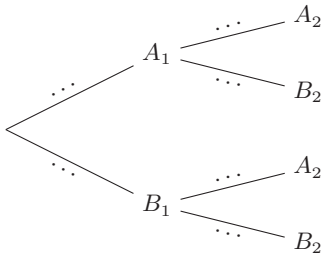
À l'ouverture du service le premier matin, la société a disposé la moitié de ses vélos au point A, l'autre moitié au point B. On considère un vélo de la société pris au hasard. Pour tout entier naturel non nul n, on définit les évènements suivants :

- A_n : « le vélo se trouve au point A le n-ième matin »

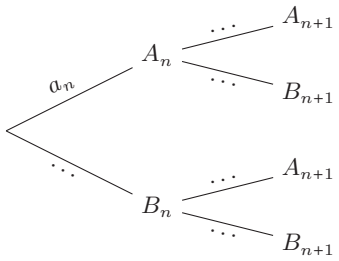
- B_n : « le vélo se trouve au point B le n-ième matin ».

Pour tout entier naturel non nul n, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n et b_n la probabilité de l'évènement B_n. Ainsi $a_1 = 0{,}5$ et $b_1 = 0{,}5$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premiers matins :



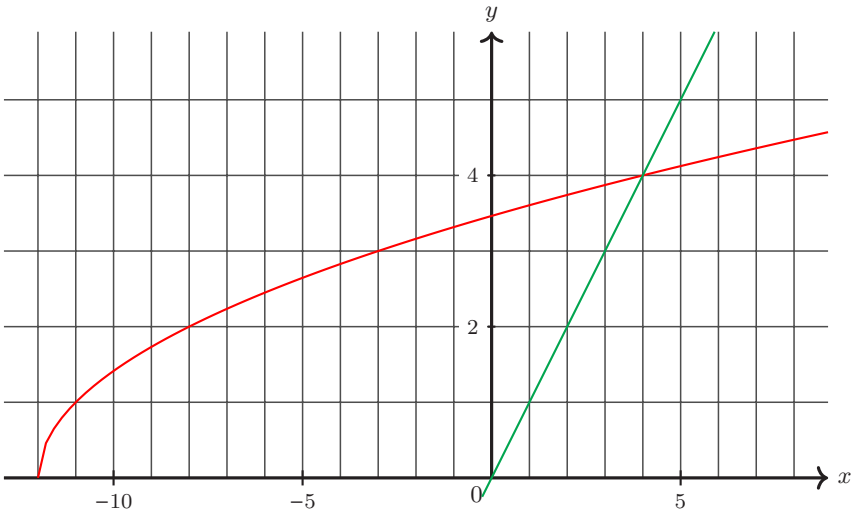
2. (a) Calculer a_2.
   (b) Le vélo se trouve au point A le deuxième matin. Calculer la probabilité qu'il se soit trouvé au point B le premier matin. La probabilité sera arrondie au millième.
3. (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $n+1$-ième matins.



   (b) Justifier que pour tout entier naturel non nul n, $a_{n+1} = 0{,}6a_n + 0{,}24$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $a_n = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}$.
5. Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
6. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geqslant 0{,}599$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

Exercice 161. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$.

1. Démontrez que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 4$.
2. On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-12; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+12}$.



Construisez les premiers de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et conjecturez son comportement.

3. (a) Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - 4 \leqslant \frac{1}{4}(u_n - 4)$.
   (b) Déduisez-en, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n - 4 \leqslant \frac{1}{4^{n-1}}$.
4. Déduisez-en que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie que l'on précisera.

Exercice 162. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = 1{,}4v_n - 0{,}05v_n^2$.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1{,}4x - 0{,}05x^2$.
   (a) Étudiez les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 8]$.
   (b) Représentez graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ avec le centimètre comme unité graphique, ainsi que les 10 premiers termes de la suite (v_n).
   (c) Conjecturez son comportement.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $2 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 8$.
3. Déduisez-en que la suite (u_n) admet une limite finie.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrez que $f(x) - 8 = -0{,}05(x - 20)(x - 8)$.
   (b) Pour tout entier naturel n : $8 - v_{n+1} \leqslant 0{,}9 \times (8 - v_n)$.
   (c) Déduisez-en que, pour tout entier naturel n : $8 - v_n \leqslant 6 \times 0{,}9^n$.
   (d) Concluez.

Exercice 163. Un protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg. On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé. On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection. On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1, de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 1{,}8$.
3. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
   (c) Déterminer la valeur de ℓ. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 6 - u_n$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,7 dont on précisera le premier terme.
   (b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.
   (c) Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg. Déterminer (en détaillant les calculs si vous connaissez la fonction logarithme népérien) le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

Exercice 164. Un démographe étudie l'évolution de la population d'un pays. Depuis 1969 (cette année-là, ce pays comptait 44 500 000 habitants), il constate qu'en moyenne la population a un taux de natalité de 35 pour mille et un taux de mortalité de 17 pour mille. À ces variations, il faut ajouter 25 000 nouveaux arrivant dans ce pays et retirer 9 000 citoyens qui partent définitivement. On note p_n la population de $1969+n$, exprimée en milliers d'habitants.

1. Déterminez p_0.
2. Démontrez que pour tout entier naturel n : $p_{n+1} = 1{,}018p_n + 16$.
3. Déterminez le réel ℓ tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_n = p_n - l$ soit géométrique.
4. Déduisez-en les expressions de u_n et p_n en fonction de n entier naturel.
5. Combien d'habitants peut-on prévoir en 2012 ?
6. Au bout de combien d'années la population va-t-elle tripler, par rapport à celle de 1969 ?

Exercice 165. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$.

1. Calculez u_1, u_2 et u_3.
2. (a) Écrivez un algorithme qui, pour une valeur $M \in \mathbb{R}$ donnée, renvoie un entier n pour lequel $u_n > M$.
   (b) Programmez cet algorithme à l'aide d'une calculatrice, puis exécutez-le pour des valeurs de M telles que 10, 100, 1 000.
   (c) Déduisez-en une conjecture sur le comportement de la suite (u_n) à l'infini.
3. Démontrez que pour tout entier naturel n, si $n \geqslant 4$ alors : $u_n \geqslant 0$.
4. Démontrez que, pour tout entier naturel n, si $n \geqslant 5$ alors : $u_n \geqslant n - 3$.
5. Déduisez-en la limite de la suite (u_n).

Exercice 166. Partie A.

On définit :

. la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$;

. la suite (S_n) pour tout entier naturel n : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. Montrez par récurrence que, pour tout entier naturel n : $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$. Déduisez-en la limite de la suite (u_n).
2. (a) Déterminez le sens de variation de la suite (S_n).
   (b) Calculez (S_n) en fonction de n.
   (c) Déterminez la imite de la suite (S_n).

Partie B.

Étant donnée une suite (x_n), de nombres réels définie pour tout entier naturel n, on considère la suite (S_n) définie par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$. Indiquez pour chaque proposition suivante si elle est vraie ou fausse ; justifiez dans chaque cas.

Proposition 1 : « si la suite (x_n) est convergente alors la suite (S_n) l'est aussi ».
Proposition 2 : « les suites (u_n) et (S_n) ont le même sens de variation ».

Exercice 167. Dans cet exercice, on considère la suite (T_n) définie par : $T_0 = 180$ et, pour tout enti
$0{,}955T_n + 0{,}9$.

1. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $T_n \geqslant 20$.
   (b) Vérifier que pour tout entier naturel n, $T_{n+1} - T_n = -0{,}045\,(T_n - 20)$. En déduire le sens de variation de la suite (T_n).
   (c) Conclure de ce qui précède que la suite (T_n) est convergente. Justifier.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = T_n - 20$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $T_n = 20 + 160 \times 0{,}955^n$.
   (c) Calculer la limite de la suite (T_n).
   (d) Résoudre l'inéquation $T_n \leqslant 120$ d'inconnue n entier naturel.
3. Dans cette partie, on s'intéresse à l'évolution de la température au centre d'un gâteau après sa sortie du four.
   On considère qu'à la sortie du four, la température au centre du gâteau est de 180° C et celle de l'air ambiant de 20° C.
   La loi de refroidissement de Newton permet de modéliser la température au centre du gâteau par la suite précédente (T_n). Plus précisément, T_n représente la température au centre du gâteau, exprimée en degré Celsius, n minutes après sa sortie du four.
   (a) Expliquer pourquoi la limite de la suite (T_n) déterminée à la question 2. c. était prévisible dans le contexte de l'exercice.
   (b) On considère la fonction Python ci-dessous :

```
def temp(x) :
    T = 180
    n = 0
    while T > x :
        T=0.955*T+0.9
        n=n+1
    return n
```

   Donner le résultat obtenu en exécutant la commande temp(120).
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 168. La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\},\ u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n^n} \end{cases}$.

1. Montrez que la suite (u_n) est croissante.
2. On appelle (v_n) la suite définie par $\begin{cases} v_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\},\ v_n = v_{n-1} + \frac{1}{2^n} \end{cases}$. Montrez que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$. Déduisez-en que (u_n) est majorée.
3. Justifiez que la suite (u_n) converge.

Exercice 169. Étudiez la convergence de la suite (u_n) dans les cas suivants.

a) $u_n = -\left(\frac{5}{4}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n$.
b) $u_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
c) $u_n = \left(\frac{5}{4}\right)^n - \left(\frac{6}{5}\right)^n$.
d) $u_n = \left(-\frac{5}{4}\right)^n + \left(\frac{6}{5}\right)^n$.
e) $u_n = \left(\frac{5}{4}\right)^n + \left(-\frac{6}{5}\right)^n$.

Exercice 170. On définit les deux suites réelles (u_n) et (v_n) par $u_1 = 1$ et $v_1 = 12$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$.

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = v_n - u_n$. Démontrez que (w_n) est géométrique. Exprimez w_n en fonction de n pour tout entier naturel non nul n. Déduisez-en la limite de (w_n).
2. Démontrez que (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante. Que pouvez-vous en déduire à l'aide du 1 sur les suites (u_n) et (v_n).
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t_n = 3u_n + 8v_n$. Démontrez que t est une suite stationnaire et déduisez-en les limites de (u_n) et (v_n).

Exercice 171. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = n + \sqrt{n^2 + 3n}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Vérifiez que pour tout entier n : $u_n \geqslant 2n$.
2. Déduisez-en la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

— Centres étrangers groupe 2 sujet 1 21 mars 2023. Arbre probabiliste, suites, limites.
— Baccalauréat S Métropole 23 juin 2009

XV Corrections.

Exercice 147.

1. $u_2 = 1$, $u_3 = \sqrt{2}$, $u_4 = \sqrt{3}$ et $u_5 = \sqrt{4} = 2$.
2. Conjecture : $u_n = \sqrt{n-1}$.
3. Par récurrence. $\sqrt{1-1} = 0 = u_1$. Si $u_n = \sqrt{n-1}$ alors $u_{n+1} = \sqrt{\sqrt{n-1}^2 + 1} = \sqrt{n}$.
4. $\lim_{n\to+\infty} u_n + \infty$.

Exercice 148.

a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{4n+3}{2+\frac{1}{n}} = +\infty$.
b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{-2n}{1+\frac{1}{n^2}} = -\infty$.
c) $\lim_{n\to+\infty} (8+\sqrt{n})\left(-1+\frac{1}{n}\right) = -\infty$.
d) $\lim_{n\to+\infty} \frac{4}{\sqrt{n}+2} = 0$.
e) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{3-n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \times \frac{1}{3-n} = 0$.
f) $\lim_{n\to+\infty} n^{14} + \frac{2+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} = +\infty$.

Exercice 149.

a) $\lim_{n\to+\infty} n^4 \times \frac{1}{n^{12}} = 0$.
b) $\lim_{n\to+\infty} n^4 \times \frac{1}{n^2} = +\infty$.
c) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4n^2} \times n^2 = \frac{1}{4}$.

Exercice 150.

a) $+\infty$.
b) $+\infty$.
c) 0.
d) $+\infty$.
e) $+\infty$.
f) $-\infty$.
g) 0.
h) $-\infty$.
i) 0.
j) 0.
k) 2.
l) $-\infty$.
m) $+\infty$.
n) $-\infty$.
o) 0.

Exercice 151.

1. Démonstration par récurrence. $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 5$ et $u_4 = 26 \geqslant 16 = 2^4$. Si $u_n \geqslant 2^n$ alors $u_{n+1} = u_n^2 + 1 \geqslant (2^n)^2 + 1$. $(2^n - 1)^2 \geqslant 0$ donc $(2^n)^2 - 2^{n+1} + 1 \geqslant 0$ et enfin $(2^n)^2 + 1 \geqslant 2^{n+1}$. Enfin : $u_{n+1} \geqslant 2^{n+1}$.
2. $2 \in]1, +\infty[$ donc $\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ puis par comparaison : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 152.

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $4 - 0{,}9^n \leqslant u_n \leqslant 4 - 0{,}1^n$,
(ii) $\lim_{n\to+\infty} 4 - 0{,}9^n = 4$,
(iii) $\lim_{n\to+\infty} 4 - 0{,}1^n = 4$,

donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$.

Exercice 153.

a) $\frac{7^n}{3^n} = \left(\frac{7}{3}\right)^n$ et $\frac{7}{3} \in]1, +\infty[$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{7^n}{3^n} = +\infty$.
b) $\frac{3^n}{5^n} = \left(\frac{3}{5}\right)^n$ et $\frac{3}{5} \in [0; 1[$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{5^n} = 0$.
c) $\frac{2^n+1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right) \frac{1+\frac{1}{2^n}}{1}$ et $2 \in]1, +\infty[$ et $\frac{2}{3} \in [0,1[$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n+1}{3^n} = 0$.
d) $\frac{7^n}{4^n+10^n} = \left(\frac{7}{10}\right)^n \frac{1}{\left(\frac{4}{10}\right)^n+1}$ et $\frac{7}{10}, \frac{4}{10} \in [0; 1[$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{7^n}{4^n+10^n} = 0$.
e) $\frac{5^n+13^n}{7^n+11^n} = \left(\frac{13}{11}\right)^n \frac{\left(\frac{5}{13}\right)^n+1}{\left(\frac{7}{11}\right)^n+1}$ et $\frac{5}{13}, \frac{7}{11} \in [0; 1[$ et $\frac{13}{11} \in [1, +\infty[$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{5^n+13^n}{7^n+11^n} = +\infty$.

Exercice 154.

a) $\lim_{n\ to+\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{2^n} = 0$ car $2 \in]1, +\infty[$.
b) $n^2 - 6^n = 6^n \left(\frac{n^2}{6^n} - 1\right)$ et $6 \in]1, +\infty[$ donc $\lim_{n\to+\infty} n^2 - 6^n = -\infty$.
c) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^{-1}} + n! = +\infty$.
d) $\lim_{n\to+\infty} 2^{-n} + \sqrt{n} = +\infty$ car $\frac{1}{2} \in [0; 1[$.
e) $\lim_{n\to+\infty} n^{12} + \frac{1}{n^{100}} = +\infty$.
f) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} + n! + 1 = +\infty$.
g) $\lim_{n\to+\infty} n^2 3^n = +\infty$.
h) $\frac{n^2}{n^{12}} = \frac{1}{n^{10}}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^{12}} = 0$.
i) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{2^n} = +\infty$.
j) $n^{-2} \left(\frac{5}{4}\right)^n = \frac{1}{\frac{n^2}{\left(\frac{5}{4}\right)^n}}$ et $\frac{5}{4} \in]1, +\infty[$ donc $\lim_{n\to+\infty} n^{-2} \left(\frac{5}{4}\right)^n = +\infty$.
k) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{-3}}{\sqrt{n}} = 0$.
l) $n^5 2^{-n} = \frac{n^5}{2^n}$ et $2 \in]1, +\infty[$ donc $\lim_{n\to+\infty} n^5 2^{-n} = 0$.
m) $n^{-3} + 0{,}5^n \sqrt{n} = \frac{1}{n^3} + \frac{\sqrt{n}}{2^n}$ et $2 \in]1, +\infty[$ donc $lim_{n\to+\infty} n^{-3} + 0{,}5^n \sqrt{n} = 0$.
n) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4} \times \mathrm{e}^n + 4 = +\infty$.
o) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n} = 0$ car $e \in]1, +\infty[$.

Exercice 155.

a) $-\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
b) $-\frac{1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
c) $-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
d) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + 3^n = +\infty$ car $3 \in]1, +\infty[$.
e) $-\frac{1}{n^3} \leqslant \frac{\sin(n)}{n^3} \leqslant \frac{1}{n^3}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n^3} = 0$.
f) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{6^n} = 0$ car $6 \in]1, +\infty[$.
g) $\lim_{n\to+\infty} 0{,}5^n + \sqrt{n} = +\infty$ car $0{,}5 \in [0; 1[$.
h) $\lim_{n\to+\infty} -n^3 - 2n^2 = -\infty$.
i) $\lim_{n\to+\infty} n^2 + 4n + 1 = +\infty$.
j) $\lim_{n\to+\infty} 1 + \left(\frac{1}{6}\right)^n + n^3 = +\infty$ car $\frac{1}{6} \in [0; 1[$.
k) $n \leqslant n + (-1)^n + 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} n + (-1)^n + 1 = +\infty$.
l) $n^2 \leqslant n^2 + \sin(n) + 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} n^2 + \sin(n) + 1 = +\infty$.
m) $\sin\left(\sqrt{\cos(n^n)}\right) - n \leqslant 1 - n$ donc $\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\sqrt{\cos(n^n)}\right) - n = -\infty$.
n) $\lim_{n\to+\infty} n! + \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.
o) $\lim_{n\to+\infty} n! + \sqrt{n} = +\infty$.
p) $-\left(\frac{99}{100}\right)^n \leqslant \left(\frac{99}{100}\right)^n \sin(n) \leqslant \left(\frac{99}{100}\right)^n$ et $\frac{99}{100} \in [0; 1[$ donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{99}{100}\right)^n \sin(n) = 0$.

q) $n^2 + n \leqslant n^2 + 2n + (-1)^n n$ donc $lim_{n\to+\infty} n^2 + 2n + (-1)^n n = +\infty$.

r) $5 - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 5 - \frac{\sin(n^2)}{\sqrt{n}} \leqslant 5 + \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc $\lim_{n\to+\infty} 5 - \frac{\sin(n^2)}{\sqrt{n}} = 5$.

Exercice 156.

1. $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, $n - 1 \leqslant n + (-1)^n \leqslant n + 1$, donc, la fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}_+$, $\frac{1}{n-1} \geqslant \frac{1}{n+(-1)^n} \geqslant \frac{1}{n+1}$.
2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n-1} = 0$.
3. On a :
   * $\forall n \geqslant 2$, $1 + \frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1 + \frac{1}{n-1}$,
   * $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n+1} = 1$,
   * $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n-1} = 1$,

   donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 157.

1.

```
def termessuite(n):
u=[1]
for i in range(1,n+1):
u=u+[u[i-1]+2*(i-1)+3]
return(u)
```

2. $u_1 = 4$, $u_2 = 9$, $u_3 = 16$, $u_4 = 25$, $u_5 = 36$, $u_6 = 49$, $u_7 = 64$, $u_8 = 81$, $u_9 = 100$, $u_{10} = 121$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   D'après la formule de récurrence : $u_{n+1} - u_n = 2n + 3 > 0$ donc

   (u_n) est strictement croissante.
4. (a) Par récurrence.
   Remarquons que dans ce cas nous aurions du mal à définir une fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Clairement : $n^2 + 2n + 3 > n^2$.
   (b) $n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $u_n > n^2$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
5. $u_n = (n + 1)^2$.

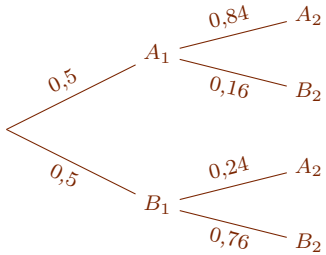
Exercice 158.

a) $+\infty$. b) $+\infty$. c) $+\infty$. d) 4.
e) $+\infty$. f) 2. g) $+\infty$. h) $+\infty$.
i) $-\infty$. j) $+\infty$. k) $+\infty$. l) $+\infty$.
m) $+\infty$. n) $-\infty$. o) Indéterminée. $4n^2 - n + 1 = n^2(4 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$. $+\infty$. p) Indéterminée. $\frac{n^3}{n^2} = n$. $+\infty$.
q) $+\infty$.

Exercice 159.

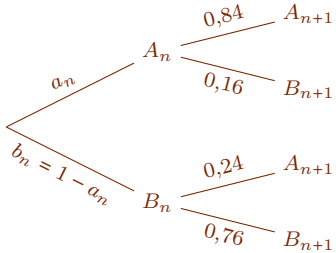
a) $+\infty$. b) $+\infty$. c) $-\infty$. d) 1. e) $+\infty$. f) $\frac{1}{3}$.
g) $+\infty$. h) $+\infty$. i) $+\infty$. j) $\frac{4}{3}$. k) 1. l) $\frac{2}{3}$.
m) 0. n) $\frac{3}{4}$. o) 1. p) $\frac{1}{6}$. q) 1.

Exercice 160.



1.

2. (a) $a_2 = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(B_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) + \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(A_2) = 0{,}5 \times 0{,}84 + 0{,}5 \times 0{,}24 = 0{,}54$.
   (b) $\mathbb{P}_{A_2}(B_1) = \frac{\mathbb{P}(A_2 \cap B_1)}{\mathbb{P}(A_2)} = \frac{0{,}5 \times 0{,}24}{0{,}54} \approx 0{,}222$



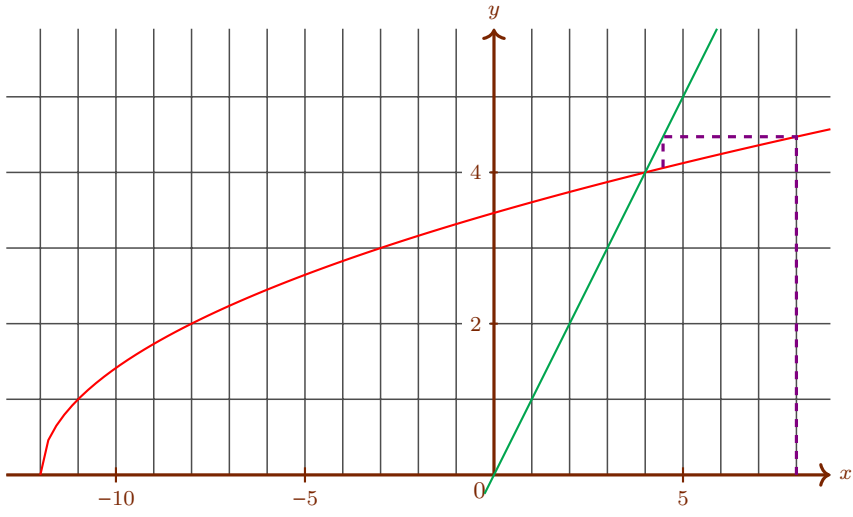
3. (a)
   (b) $a_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n \cap A_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n \cap A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n) \times \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) = a_n \times 0{,}84 + (1 - a_n) \times 0{,}24 = 0{,}6a_n + 0{,}24$.
4. $0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{1-1} = 0{,}5 = a_1$. Si $a_n = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}$ alors $a_{n+1} = 0{,}6a_n + 0{,}24 = 0{,}6(0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}) + 0{,}24 = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^n$.
5. $0{,}6 \in [0; 1[$ donc $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0{,}6$. Sur le long terme, la probabilité que le vélo se retrouve en A est de 0,6.
6. On peut résoudre l'inéquation avec le logarithme népérien ou utiliser un programme :

```
def seuil():
n=0
a=0.5
while a<0.599:
n=n+1
a=0.6*a+0.24
return n
```

Réponse $n = 10$.

Exercice 161.

1. Démonstration par récurrence. $u_0 \geqslant 4$. Si $u_n \geqslant 4$, alors, $g : x \mapsto \sqrt{x + 12}$ étant croissante sur $[-12, +\infty[$, $g(u_n) \geqslant g(4) = 4$.



2. La suite semble converger vers 4.
3. (a) $u_{n+1} - 4 = \sqrt{u_n + 12} - 4 = \frac{u_n+12-16}{\sqrt{u_n+12}+4} = \frac{1}{\sqrt{u_n+12}+4}(u_n - 4) \leqslant \frac{1}{4}(u_n - 4)$ car on considère des nombres positifs et $\sqrt{u_n + 12} + 4 \geqslant 4$..
   (b) Par récurrence immédiate.
4. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n - 4 = 0$ et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 4.

Exercice 162.

1. (a) $f(x) = -0{,}05\left(x^2 - 28x + 196\right) + 9{,}8 = -0{,}05\,(x - 14)^2 + 9{,}8$ donc f strictement croissante sur $[0; 8]$.
   (b)
   (c) La suite semble croissante et semble converger vers 8.
2. $2 \leqslant v_0 \leqslant 8$. Si $2 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 8$ alors f étant croissante sur $[2; 8]$, $f(2) \leqslant f(v_n) \leqslant f(v_{n+1}) \leqslant f(8)$ et on conclue avec $f(2) = 2{,}6 \geqslant 2$ et $f(8) = 8$.
3. On a :
   * $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant v_{n+1}$ autrement dit la suite est croissante,
   * $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant 8$ autrement dit la suite est majorée,

   donc, d'après le théorème de la limite monotone, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ et $\ell \leqslant 8$.
   (a) On développe, on ordonne et on réduit les deux membres de l'égalité proposée.
   (b) D'après la question précédente : $f(v_n) - 8 = -0{,}05(v_n - 20)(v_n - 8) \iff 8 - v_{n+1} = 0{,}05(v_n-20)(v_n-8)$. Comme $v_n \in [2; 8]$, $12 \leqslant 20-v_n \leqslant 18$, $12(8-v_n) \leqslant (20-v_n)(8-v_n) \leqslant 18(8 - v_n)$. Ainsi $0{,}05(20 - v_n)(8 - v_n) \leqslant 0{,}9(8 - v_n)$. Enfin : $8 - v_{n+1} \leqslant 0{,}9 \times (8 - v_n)$.
   (c) Par une récurrence immédiate.
   (d) Avec le théorème des gendarmes $\lim_{n\to+\infty} v_n = 8$.

Exercice 163.

1. $u_1 = \left(1 + \frac{-30}{100}\right) u_0 + 1{,}8 = 0{,}7 \times 2 + 1{,}8 = 3{,}2$.
2. $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 1{,}8$ comme à la question précédente.
3. (a) $u_0 < u_1 < 6$. Si $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$ alors, $f : x \mapsto 0{,}7x + 1{,}8$ étant une fonction affine strictement croissante, $f(u_n) < f(u_{n+1}) < f(6)$ et on conclue avec $f(6) = 6$.
   (b) On a :
   * $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$ autrement dit la suite est strictement croissante,
   * $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 6$ autrement dit la suite est majorée par 6,

   donc, d'après le théorème de la limite monotone, la suite converge vers un réel ℓ et $\ell \leqslant 6$.
   (c) On a :
   * $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$,
   * $\lim_{n\to+\infty} 0{,}7u_n + 1{,}8 = 0{,}7\ell + 1{,}8$,

donc $\ell = 0{,}7\ell + 1{,}8$ et donc forcément $\ell = \frac{1{,}8}{0{,}3} = 6$.

4. (a) $v_{n+1} = 6 - u_{n+1}$. Or $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 1{,}8$ donc $v_{n+1} = 6 - (0{,}7u_n + 1{,}8)$. Comme $u_n = 6 - v_n$: $v_{n+1} = 6 - (0{,}7(6 - v_n) + 1{,}8) = 0{,}7v_n$. (v_n) est géométrique de terme initial $v_0 = 6 - u_0 = 6 - 2 = 4$ et de raison 0,7.
   (b) $v_n = 4 \times 0{,}7^n$ puis $u_n = 6 - 4 \times 0{,}7^n$.
   (c)

```
def seuil():
n=0
u=2
while u<5.5:
n=n+1
u=0.7*u+1.8
return n
```

On obtient $n = 6$ il faut donc 6 heures.

Exercice 164.

1. $p_0 = 44500$.
2. Pas des maths, de la modélisation $p_{n+1} = \left(1 + \frac{35}{1000} - \frac{17}{1000}\right) \times p_n + 25 - 9$.
3. Une astuce pour trouver l : c'est forcément un point fixe de la formule de récurrence. $u_{n+1} = p_{n+1} - l = 1{,}018p_n + 16 - l = 1{,}018\left(p_n + \frac{16-l}{1{,}018}\right)$ donc $\frac{16-l}{1{,}018} = -l \Leftrightarrow l = -\frac{16}{0{,}018} \Leftrightarrow l = -\frac{8000}{9}$.
4. $u_n = u_0 \times 1{,}018^n = (44500 + \frac{8000}{9}) \times 1{,}018^n$. $p_n = (44500 + \frac{8000}{9}) \times 1{,}018^n - \frac{8000}{9}$.
5. $u_{43} \approx 96858{,}23903$.

Exercice 165.

1. $u_1 = -\frac{5}{3}$, $u_2 = -\frac{14}{9}$ et $u_3 = -\frac{14}{27}$.
2. (a)

```
def seuil(M):
n=0
u=1
while u<=M:
u=1/3*u+n-2
n=n+1
return n
```

   (b) 10 : $n = 11$, 100 : $n = 71$, 1 000 : $n = 671$.
   (c) Elle semble avoir $+\infty$ pour limite.
3. Démonstration par récurrence. $u_4 = \frac{66}{81} \geqslant 0$. Si $u_n \geqslant 0$ alors $\frac{1}{3}u_n \geqslant 0$ puis $\frac{1}{3}u_n + n - 2 \geqslant n - 2 \geqslant 0$ car $n \geqslant 0$.
4. Idem.
5. On a :
   * $\lim_{n\to+\infty} n - 3 = +\infty$,
   * $\forall n \geqslant 5$, $u_n \geqslant n - 3$,

   donc, d'après le théorème de comparaison $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 166. Partie A.

1. $1 + \frac{12}{5^0} = 13 = u_0$. Si $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$ alors $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} = \frac{1}{5}\left(1 + \frac{12}{5^n}\right) + \frac{4}{5} = 1 + \frac{12}{5^{n+1}}$.
   Puisque $5 \in]1, +\infty[$, $\lim_{n\to+\infty} 5^n = +\infty$ et donc $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{12}{5^n} = 1$.
2. (a) $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} > 0$ donc la suite est strictement croissante.
   (b) $S_n = \sum_{k=0}^{n} 1 + \frac{12}{5^k} = \left(\sum_{k=0}^{n} 1\right) + 12\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^k\right) = n + 1 + 12 \times 1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{5}} = n + 1 + \frac{35}{2} - \frac{1}{4\times 5^n}$.
   (c) $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Partie B.

Les propositions sont fausses comme le montre la partie A.

Exercice 167.

1. (a) Hérédité : $x \mapsto 0{,}955 + 0{,}9$ est croissante.
   (b) $T_{n+1} - T_n = -0{,}045(T_n - 20) \leqslant 0$ suite décroissante.
   (c) Décroissante et minorée par 20 donc convergente.
2. (a) Raison 0,955.
   (b)
   (c) $\lim_{n\to+\infty} 0{,}955^n = 0$ car $0{,}955 \in]-1;1[$.
   (d) $T_n \leqslant 120 \Leftrightarrow 0{,}955^n \leqslant \frac{120-20}{160} \Leftrightarrow n \geqslant \ln\left(\frac{120-20}{160}\right)$ ou à la calculatrice 11.
3. (a)
   (b) Temps d'attente en minutes pour obtenir une température inférieure à 120°.

Exercice 168.

1. $u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n^n} > 0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.
2. $0 \leqslant u_1 \leqslant v_1$. Si $0 \leqslant u_{n-1} \leqslant v_{n-1}$ alors $0 + \frac{1}{n^n} \leqslant u_{n-1} + \frac{1}{n^n} \leqslant v_n + \frac{1}{2^n}$ donc $0 \leqslant u_n \leqslant v_{n-1} + \frac{1}{2^n}$.
   Or si $n \geqslant 2$ alors $2^n \leqslant n^n$ et donc $\frac{1}{n^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$. Ainsi $0 \leqslant u_n \leqslant v_{n-1} + \frac{1}{2^n} = v_n$.
   $v_n - v_{n-1} = \frac{1}{2^n} > 0$ donc (v_n) est strictement croissante.
   $v_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = 2$.
   On a :
   * (v_n) est croissante,
   * $\lim_{n\to+\infty} v_n = 2$,

   donc, d'après aucun résultat de cours mais un raisonnement par l'absurde l'établit simplement, (v_n) est majorée par 2.
3. On a :
   * (u_n) est croissante d'après la première question,
   * $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant v_n \leqslant 2$ autrement dit (u_n) est bornée,

   donc, d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers un réel ℓ et $\ell \leqslant 2$.

Exercice 169.

a) $\lim_{n\to+\infty} -\left(\frac{5}{4}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n = -\infty$.
b) $\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.
c) $\lim_{n\to+\infty} = \left(\frac{5}{4}\right)^n - \left(\frac{6}{5}\right)^n = +\infty$.
d) $\left(-\frac{5}{4}\right)^n + \left(\frac{6}{5}\right)^n$ diverge sans limite car la suite des termes de rangs pairs diverge vers $+\infty$ et celle des termes de rangs impairs ver $-\infty$.
e) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n + \left(-\frac{6}{5}\right)^n = +\infty$.

Exercice 170.

1. $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n+3v_n}{4} - \frac{u_n+2v_n}{3} = \frac{-u_n+v_n}{12} = \frac{1}{12}w_n$ donc (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{12}$ et de terme initial $w_1 = v_1 - u_1 = 12 - 1 = 11$. $w_n = 11 \times \frac{1}{12^{n-1}}$. $-\frac{1}{12} \in]-1;1[$ donc $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$
2. $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}w_n = \frac{2}{3} \times 11 \times \frac{1}{12^{n-1}} > 0$ donc (u_n) est strictement croissante. De même $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{4}w_n < 0$ donc (v_n) est strictement décroissante.
   On a donc : $u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$ donc d'après le théorème de la limite monotone le deux suites convergent et d'après la question précédente elles ont la même limite ℓ.
3. $t_1 = 3u_1 + 8u_1 = 99$. Si $t_n = 99$ alors $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n = 3u_n + 8v_n = 99$ donc (t_n) est stationnaire.
   On a :
   (i) $\lim_{n\to+\infty} t_n = 99$,
   (ii) $\lim_{n\to+\infty} 3u_n + 8v_n = 3\ell + 8\ell$,

   donc $99 = 11\ell$ enfin $\ell = 9$.

Exercice 171.

1. $n + \sqrt{n^2 + 3n} = n + n\sqrt{1 + \frac{3}{n}} \geqslant 2n$ car $\sqrt{1 + \frac{3}{n}} > 1$.
2. On a :
   (i) $\lim_{n \to +\infty} 2n = +\infty$,
   (ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2n$,

   donc, d'après le théorème de comparaison, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Géométrie dans l'espace.

9. Vecteurs de l'espace, combinaisons linéaires, bases.

I Espace vectoriel euclidien.

Comme dans le plan nous pouvons définir des vecteurs comme le déplacement associé à une translation mais dans un espace à trois dimensions. Comme trois points sont toujours contenus dans un plan un grand nombre de résultats du plan se retrouvent dans l'espace.

Définition 22. On appelle *espace vectoriel euclidien* et on note $\vec{\mathscr{E}}$ l'ensemble formé de tous les vecteurs de l'espace.

Remarques.

1. On retrouve dans cet espace les opérations d'addition de vecteurs et de multiplication d'un vecteur par un nombre réel (appelé scalaire).
2. Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ on dit que $\overrightarrow{AB}$ est un représentant de $\vec{u}$.
3. On retrouve également la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
4. L'identité du parallélogramme : $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
5. La notion de colinéarité est toujours valable.

Exercice 172. Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = x + k\mathrm{e}^{-x}$. On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé. Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur $\mathbb{R}$. La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe $\mathcal{C}_k$. il semblerait que, pour tout réel k strictement positif, les points A_k soient alignés. Est-ce le cas ?

II Combinaisons linéaires.

Définition 23. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $()\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) \in \vec{\mathscr{E}}^n$. Le vecteur $\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{n}$ est appelé une *combinaison linéaire* des vecteurs $\vec{v}_1$, ..., $\vec{v}_n$.

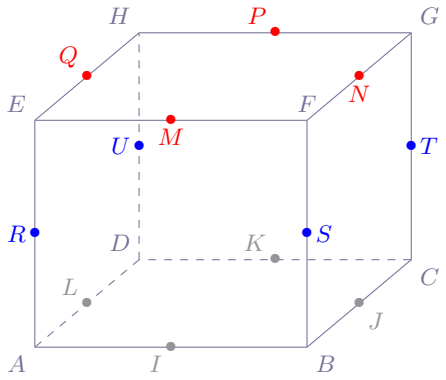
Exemples.

1. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs alors $-3\vec{u} + 2\vec{v}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. $4\vec{i} - \frac{1}{5}\vec{j} + \pi\vec{k}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.
3. $4\vec{i}$ est aussi une combinaison linéaire (avec un unique vecteur).
4. $\vec{0}$ est aussi une combinaison linéaire.

Remarques.

1. La définition de combinaison linéaire est valable pour les vecteurs du plan.
2. La combinaison linéaire est le calcul fondamental pour l'étude des vecteurs.

Dans les exercices lorsqu'on parle d'un parallélépipède rectangle, ou un cube, $ABCDEFGH$ vous pourrez raisonner sur la figure suivante. Les points qui ne sont pas de sommets les milieux des arêtes.

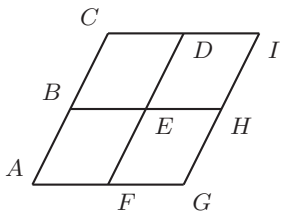


On attend des élèves qu'ils soient capables de lire des informations vectorielles sur une figure en perspective cavalière.

Exercice 173. Démontrez les égalités de vecteurs de l'espace.

a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$.
b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$.
c) $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CD}$.
d) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.
e) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$
f) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$

Exercice 174. On considère la figure plane suivante.



Donnez un autre représentant de chacun des vecteurs proposés.

a) $\overrightarrow{AB}$.
b) $\overrightarrow{DF}$.
c) $\overrightarrow{GH}$.
d) $\overrightarrow{DC}$.
e) $\overrightarrow{BH}$.
f) $\overrightarrow{DH}$.
g) $\overrightarrow{FC}$.
h) $\overrightarrow{HA}$.
i) $\overrightarrow{IE}$.

Exercice 175. On considère un parallélépipède rectangle (pavé droit) $ABCDEFGH$. Donnez, sans justification, d'autres représentants des vecteurs suivants.

a) $\overrightarrow{AB}$.
b) $\overrightarrow{CA}$.
c) $\overrightarrow{AE}$.
d) $\overrightarrow{CF}$.
e) $\overrightarrow{FB}$.
f) $\overrightarrow{CG}$.
g) $\overrightarrow{CD}$.
h) $\overrightarrow{CH}$.
i) $\overrightarrow{BH}$.
j) $\overrightarrow{GD}$.
k) $\overrightarrow{GH}$.
l) $\overrightarrow{DB}$.
m) $\overrightarrow{HF}$.
n) $\overrightarrow{EF}$.
o) $\overrightarrow{DF}$.
p) $\overrightarrow{DE}$.
q) $\overrightarrow{BG}$.
r) $\overrightarrow{AF}$.
s) $\overrightarrow{BE}$.
t) $\overrightarrow{HD}$.
u) $\overrightarrow{HB}$.
v) $\overrightarrow{AH}$.
w) $\overrightarrow{GA}$.
x) $\overrightarrow{AD}$.
y) $\overrightarrow{CB}$.

Exercice 176. On considère un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$. Exprimez les sommes de vecteurs suivantes sous forme d'un seul représentant faisant intervenir uniquement les points de la figure.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$. b) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FH}$. c) $\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{CD}$.
d) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{HG}$. e) $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{EA}$. f) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{GF}$.

Exercice 177. On considère un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$. Simplifiez les sommes suivantes sous forme d'un seul représentant. *Vous pourrez utiliser l'identité du parallélogramme.*

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. b) $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FH}$. c) $\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{DC}$. d) $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GH}$. e) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF}$.
f) $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GE}$ g) $\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{AB}$. h) $\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FH}$

Exercice 178. On considère un cube $ABCDEFGH$. Simplifiez la combinaison linéaire sous forme d'un unique représentant. *Exemple :* $-2 \cdot \overrightarrow{QM} + 1 \cdot \overrightarrow{EF} + 1 \cdot \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{MK}$.

a) $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{PM} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{NQ}$. b) $\overrightarrow{DK} + \overrightarrow{IS} + \overrightarrow{TP}$.
c) $3 \cdot \overrightarrow{DL} + 2 \cdot \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{RQ}$. d) $\overrightarrow{CB} + 2 \cdot \overrightarrow{UP}$.
e) $\overrightarrow{SI} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{AE}$. f) $2 \cdot \overrightarrow{HQ} + 2 \cdot \overrightarrow{HP} + \overrightarrow{FD}$.
g) $\overrightarrow{DE} - 2 \cdot \overrightarrow{UH} + \overrightarrow{BG}$.

Exercice 179. On considère un cube $ABCDEFGH$. Exprimez le vecteur $\vec{u}$ en fonction des vecteurs $\vec{v}$, $\vec{w}$ et éventuellement $\vec{s}$ dans les cas suivants. *Exemple :* $\overrightarrow{AF} = 1 \cdot \overrightarrow{AB} + 1 \cdot \overrightarrow{BF}$ *est une expression de* $\vec{u} = \overrightarrow{AF}$ *comme combinaison linéaire des vecteurs* $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ *et* $\vec{w} = \overrightarrow{BF}$.

a) $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$. b) $\vec{u} = \overrightarrow{BD}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{BA}$.
c) $\vec{u} = \overrightarrow{DG}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$. d) $\vec{u} = \overrightarrow{FC}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{HD}$.
e) $\vec{u} = \overrightarrow{MI}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AI}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{GT}$. f) $\vec{u} = \overrightarrow{QM}$, $\vec{v} = \overrightarrow{HE}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{EF}$.
g) $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$. h) $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{s} = \overrightarrow{CD}$.
i) $\vec{u} = \overrightarrow{HF}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{s} = \overrightarrow{AE}$. j) $\vec{u} = \overrightarrow{AP}$, $\vec{v} = \overrightarrow{IB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{DL}$ et $\vec{s} = \overrightarrow{CT}$.
k) $\vec{u} = \overrightarrow{DS}$, $\vec{v} = \overrightarrow{LR}$, $\vec{w} = \overrightarrow{EH}$ et $\vec{s} = \overrightarrow{AK}$. l) $\vec{u} = \overrightarrow{PB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{UK}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$ et $\vec{s} = \overrightarrow{HE}$.

III Indépendance linéaire.

Définition 24. Pour $n \in \mathbb{N}$, nous dirons que des vecteurs $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n$ de $\vec{\mathscr{E}}$ sont *linéairement indépendants* si la seule combinaison linéaire de ces vecteurs qui égale le vecteur nul est obtenue avec des coefficients tous nuls.

Remarques.

1. Autrement dit pour que les vecteurs soient linéairement indépendants il faut que : s'il existe des nombres a_1, .., a_n tels que $a_1\vec{v}_1 + \cdots + a_n\vec{v}_n = \vec{0}$ alors, forcément, $a_1 = \cdots = a_n = 0$.
2. Cette définition technique signifie que les vecteurs contiennent des directions différentes, qu'aucun des deux (resp. trois) vecteurs ne peut être retiré sans une perte de possibilité de déplacement.

Exemples.

1. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{u}$ et $\vec{u}$ ne sont pas linéairement indépendants puisque, par exemple : $2 \cdot \vec{u} - 1 \cdot \vec{u} - 1 \cdot \vec{u} = \vec{0}$.
2. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w} = -\vec{u} - \vec{v}$ ne sont pas linéairement indépendants car : $1 \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{v} + 1 \cdot \vec{w} = \vec{0}$.
3. Si $ABCDEFGH$ est un cube non réduit à un point alors (et nous l'admettrons pour l'instant) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont des vecteurs linéairement indépendants.

Proposition 62. Deux vecteurs ne sont pas linéairement indépendants si et seulement s'ils sont colinéaires.

Démonstration. Supposons les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non linéairement indépendants. S'il existe des réels λ et μ dont l'un au moins est non nul, par exemple λ, et tel que $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} = -\frac{\mu}{\lambda}\vec{v}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

La réciproque est du même tonneau.

Exemples.

1. Soit I le milieu d'un segment $[AB]$. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas linéairement indépendant puisque colinéaires.
2.

IV Vecteur directeur d'une droite.

Pour des raisons pédagogiques (éviter le cours ne soit trop long et trop décousu) nous admettrons dès maintenant des résultats qui seront vus plus loin dans la leçon : les points et les vecteurs de l'espace admettent trois coordonnées de la même façon que dans les plans il n'en admettent que deux.

Définition 25. Soient A et B deux points de l'espace $\mathscr{E}$. On appelle *droite* (AB) l'ensemble des points M de l'espace $\mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Remarques.

1. Autrement dit (AB) est l'ensemble des points M tels que : $\exists k \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$. On dit que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, pour tout $k \in \mathbb{R}$, est *une représentation paramétrique vectorielle* de (AB).

Définition 26. Soient $A \in \mathscr{E}$ et $\vec{u} \in \vec{\mathscr{E}}$ tel que $\vec{u} \neq \vec{0}$. On appelle droite passant par A et de *vecteur directeur* $\vec{u}$ la droite (AB) où B est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$. Le couple $(A; \vec{u})$ est appelé *un repère de la droite* (AB).

Exemples.

1. Soient A et B deux points distincts de l'espace. $(A; \overrightarrow{AB})$ et $(B; -3\overrightarrow{BA})$ sont des repères de la droite (AB).

Proposition 63. Soient $A \in \mathscr{E}$ et $\vec{u} \in \vec{\mathscr{E}}$ tel que $\vec{u} \neq \vec{0}$. Notons $\mathscr{D}$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Si $C \in \mathscr{D}$ alors il existe un unique $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AC} = k\vec{u}$.

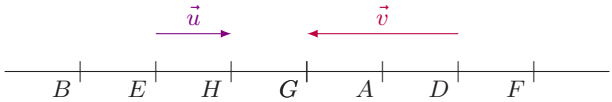
Remarques.

1. k est appelé *l'abscisse de C dans le repère* $(A; \vec{u})$.
2. L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est la droite de repère $(A; \vec{u})$; on parle de *représentation paramétrique vectorielle*. De cette égalité entre vecteurs on déduit trois égalités entre les coordonnées : $\begin{cases} x_M = \lambda x_{\vec{u}} + x_A \\ y_M = \lambda y_{\vec{u}} + y_A \\ z_M = \lambda z_{\vec{u}} + z_A \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ qu'on appelle *une représentation paramétrique de la droite* dont un repère est $(A; \vec{u})$. Il est clair que toute droite admet une représentation paramétrique (et la réciproque est également vraie) et que cette représentation paramétrique n'est pas unique.

Exemples.

1. Soient A, B et C trois points de l'espace tels que $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires puisque $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ et donc A, B et C sont alignés. De plus l'abscisse de B dans le repère $(A;\overrightarrow{AC})$ est $\frac{3}{2}$. Celle de A dans le même repère est 0. L'abscisse de B dans le repère $(C;\overrightarrow{AB})$ est $\frac{1}{3}$.

Exercice 180.



Donnez sans justification l'abscisse du point dans le repère.

a) B dans $(A;\vec{u})$.
b) H dans $(B;\vec{v})$.
c) G dans $(D;2\vec{u})$.
d) E dans $(F;2\vec{v})$.
e) A dans $(D;2\vec{v})$.

Exercice 181. On considère un pavé droit $ABCDEFGH$. Dans chaque cas décrivez par deux points la droite dont on donne un repère. Exemple : la droite dont un repère est $(A;\overrightarrow{AL})$ est la droite (AL).

a) $(A;\overrightarrow{DC})$.
b) $(H;\overrightarrow{TJ})$.
c) $(M;\overrightarrow{UD})$.
d) $(K;\overrightarrow{BE})$.
e) $(A;\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AE})$.
f) $(B;\overrightarrow{HM}+\overrightarrow{HD})$.
g) $(S;\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{GH})$.
h) $(G;\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{TC})$.
i) $(I;\overrightarrow{KU}+\frac{1}{2}\overrightarrow{KP})$.
j) $(G;\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{KJ})$.
k) $(I;\overrightarrow{DK}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CG})$.
l) $(F;\overrightarrow{UD}+\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{BS})$.

Exercice 182. Donnez une représentation paramétrique de la droite Δ de $\mathscr{E}_3$ définie par :

a) $A(-1,-2,1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$,
b) $A(1,0,0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$,
c) $A(17,37,0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,
d) $A(100;2,4;-\frac{1}{3})$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{\pi}\\3\times10^2\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$,
e) $A(2,3,4)$ et $B(-2,6,5)$,
f) $A(6,-2,1)$ et $B(1,2,-1)$,
g) $A(5,7,0)$ et $B(0,1,2)$,
h) $A(1,2,3)$ et $B(-2,2,2)$,
i) $A(0,-1,1)$ et $B(0,2,1)$,
j) $A(2,0,4)$ et $B(1,0,3)$,
k) $A(1,-1,0)$ et $B(0,2,0)$,
l) $A(0,0,3)$ et $B(0,0,-2)$,

Exercice 183. Donnez un vecteur directeur et deux points des droites dont les représentations paramétriques sont données (avec t un paramètre réel) :

a) $\begin{cases} x = 3t+1 \\ y = 2t-3 \\ z = -4t+2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = -2t+2 \\ y = t-2 \\ z = 6t+3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -t-3 \\ z = t+2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t-3 \\ z = 4 \end{cases}$

Exercice 184. Démontrez que les droites d_1 et d_2 dont on donne des représentations paramétriques ne sont pas sécantes.

a) $d_1 : \begin{cases} x &= 2t_1 + 1 \\ y &= t_1 + 1 \\ z &= -4t_1 + 2 \end{cases}, t_1 \in \mathbb{R}$ et $d_2 : \begin{cases} x &= 4t_2 - 5 \\ y &= -t_2 + 7 \\ z &= -2t_2 - 4 \end{cases}, t_2 \in \mathbb{R}.$

b) $d_1 : \begin{cases} x &= -t_1 + 2 \\ y &= t_1 + 3 \\ z &= t_1 \end{cases}, t_1 \in \mathbb{R}$ et $d_2 : \begin{cases} x &= t_2 - 2 \\ y &= -3t_2 + 1 \\ z &= t_2 + 1 \end{cases}, t_2 \in \mathbb{R}.$

Exercice 185. Déterminez le point d'intersection des droites d_1 et d_2 dont on donne des représentations paramétriques.

a) $d_1 : \begin{cases} x &= t_1 + 1 \\ y &= t_1 + 2 \\ z &= t_1 - 1 \end{cases}, t_1 \in \mathbb{R}$ et $d_2 : \begin{cases} x &= t_2 \\ y &= -t_2 + 1 \\ z &= t_2 - 2 \end{cases}, t_2 \in \mathbb{R}.$

b) $d_1 : \begin{cases} x &= -t_1 + 2 \\ y &= t_1 + 1 \\ z &= t_1 \end{cases}, t_1 \in \mathbb{R}$ et $d_2 : \begin{cases} x &= 2t_2 - 1 \\ y &= -3t_2 + 5 \\ z &= t_2 \end{cases}, t_2 \in \mathbb{R}.$

Exercice 186. Dans chaque dites si le point A appartient à la droite d.

a) $A(11, -37{,}15)$ et $d : \begin{cases} x &= 2t + 1 \\ y &= -7t - 2 \\ z &= 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

b) $A(13, -6{,}12)$ et $d : \begin{cases} x &= 4t - 3 \\ y &= -3t + 6 \\ z &= 5t - 10 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

c) $A(138, -138{,}13)$ et $d : \begin{cases} x &= t + 1 \\ y &= -t - 1 \\ z &= 12 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

d) $A(-5, -21{,}50)$ et $d : \begin{cases} x &= -5 \\ y &= 3t \\ z &= -7t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

V Direction d'un plan.

Définition 27. Soient A, B et C trois points de l'espace $\mathscr{E}$. On appelle *plan* (ABC) l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{AM}$ soit une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Exemples.

1. Soit $ABCDEFGH$ un pavé droit. $J \in (AID)$ car $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Exercice 187. Donnez dans chaque cas un quatrième point du plan proposé. Par exemple, pour (ABC) le point D convient : $D \in (ABC)$.

a) (DEF). b) (HCD). c) (EFB). d) (BCF). e) (FHG).
f) (UJT). g) (PRM). h) (LBS). i) (MJI). j) (DNH).
k) (NGT). l) (PQN). m) (RQM). n) (USR). o) (HRT).

Exercice 188. Donnez quatre points non coplanaires du cube $ABCDEFGH$.

Définition 28. Soient A, B et C trois points distincts deux à deux et non alignés. On appelle *direction du plan* (ABC) tout couple $(\vec{u},\vec{v})$ de vecteurs non nuls tel que :

(i) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants (non colinéaires),

(ii) les images de A par les translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des points appartenant à (ABC).

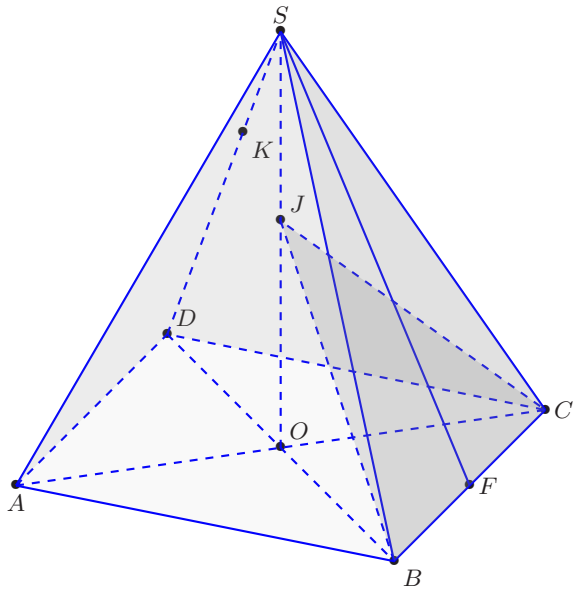
Remarques.

1. Tout plan (ABC) de l'espace admet au moins une direction : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ car les points sont distincts deux à deux et non alignés.
2. On appelle *vecteur du plan* (ABC) toute combinaison linéaire de vecteurs d'une de ss direction.

Exercice 189. Lisez sur la figure la décomposition en combinaison linéaire du vecteur proposé sur la direction donnée. Par exemple, pour $\overrightarrow{AC}$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$, on peut écrire : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

a) $\overrightarrow{AK}$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$. b) $\overrightarrow{DB}$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$. c) $\overrightarrow{IK}$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$. d) $\overrightarrow{LB}$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$.
e) $\overrightarrow{DU}$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$. f) $\overrightarrow{FP}$ et $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}\right)$. g) $\overrightarrow{EJ}$ et $\left(\overrightarrow{DH},\overrightarrow{QC}\right)$. h) $\overrightarrow{IM}$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right)$.
i) $\overrightarrow{BH}$ et $\left(\overrightarrow{BG},\overrightarrow{BA}\right)$.

Exercice 190.



Donnez au moins deux directions non triviales des plans suivants. Exemple : pour le plan (ABC), $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB}\right)$ est une base triviale, $\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{OC}\right)$ n'est pas une base mais $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}\right)$ est une base qui convient.

a) (ODJ). b) (BCJ). c) (ADK). d) (SDC). e) (DOC).
f) (ABS).

Proposition 64. Soient $\mathscr{B} = (\vec{u},\vec{v})$ une direction d'un plan $\mathscr{P}$ et $A \in \mathscr{P}$. Si $M \in \mathscr{P}$ il existe un unique couple de nombres réels, (x,y), tel que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Remarques.

1. Le couple (x,y) est appelé *les coordonnées de M*. x est appelé *abscisse* et y *ordonnée*.
2. L'écriture $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ est une représentation paramétrique vectorielle du plan. En considérant les coordonnées nous obtenons une représentation paramétrique du plan : $\begin{cases} x_M = \lambda x_{\vec{u}} + \mu x_{\vec{v}} + x_A \\ y_M = \lambda y_{\vec{u}} + \mu y_{\vec{v}} + y_A \\ z_M = \lambda z_{\vec{u}} + \mu z_{\vec{v}} + z_A \end{cases}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Celle-ci fait intervenir deux paramètres. S'il peut arriver que nous la rencontrions nous n'en ferons pas un grand usage.

Définition 29. Soient $\mathscr{P}$ un plan de $\mathscr{E}$, $A \in \mathscr{P}$ et $\mathscr{B} = (\vec{u},\vec{v})$ une direction de $\mathscr{P}$. La 3-liste $(A;\vec{u},\vec{v})$ est appelée *un repère du plan* (ABC).

Remarques.

1. Un plan peut être défini par trois points distincts deux à deux et non alignés où la donnée d'un repère.

Exercice 191. Nommez par trois points distincts deux à deux et non alignés, le plan dont on donne un point et une base. Par exemple pour A et $\left(\overrightarrow{DU},\overrightarrow{AB}\right)$, le plan est (ABR), ou (ASF).

a) S et $\left(\overrightarrow{SN},\overrightarrow{AD}\right)$. b) S et $\left(\overrightarrow{LU},\overrightarrow{DC}\right)$. c) D et $\left(\overrightarrow{GT},\overrightarrow{US}\right)$. d) M et $\left(\overrightarrow{EQ},\overrightarrow{HP}\right)$.
e) K et $\left(\overrightarrow{NM},\overrightarrow{BS}\right)$. f) U et $\left(\overrightarrow{UE},\overrightarrow{UP}\right)$. g) M et $\left(\overrightarrow{UH},\overrightarrow{KB}\right)$. h) D et $\left(\overrightarrow{UM},\overrightarrow{GT}\right)$.
i) U et $\left(\overrightarrow{SG},\overrightarrow{HS}\right)$.

VI Base de l'espace.

Définition 30. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs de l'espace vectoriel $\vec{\mathscr{E}}$. Nous dirons que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est *une base de $\vec{\mathscr{E}}$* si et seulement si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants.

Remarques.

1. L'utilisation des parenthèses n'est pas anodine : $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ et $(\vec{v},\vec{u},\vec{w})$ sont deux bases différentes.
2. Les vecteurs d'une base doivent permettre de se déplacer dans toutes les directions de l'espace.
3. Si 3 vecteurs de l'espace ne sont pas linéairement indépendants on dit que ce sont des *vecteurs coplanaires*. Cette dénomination indique qu'ils ne permettent pas d'atteindre tous les points de l'espace et qu'ils permettent au mieux de se déplacer dans un plan.

Proposition 65. Soit $\mathscr{B} = (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ une base de $\vec{\mathscr{E}}$. Étant donné un vecteur $\vec{s}$ de l'espace il existe une unique 3-liste (x,y,z) telle que $\vec{s} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$.

Remarques.

1. L'unique 3-liste est appelée *les coordonnées* de $\vec{s}$.
2. x est appelé l'*abscisse*, y l'*ordonnée* ou *profondeur* et z la *cote* ou la *hauteur*.
3. Les coordonnées d'un vecteur se notent usuellement en colonne.
4. C'est seulement à cette étape de la leçon que nous établissons que les vecteurs de l'espace se décrivent avec trois coordonnées.

Exemples.

1. Soit un pavé droit $ABCDEFGH$. Dans la base $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}\right)$, $\overrightarrow{AP}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 192. On considère un pavé droit $ABCDEFGH$. Dites si les 3-listes proposées sont des bases de l'espace.

a) $\left(\overrightarrow{AL},\overrightarrow{CJ},\overrightarrow{BS}\right)$. b) $\left(\overrightarrow{KD},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BF}\right)$. c) $\left(\overrightarrow{DI},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{PF}\right)$. d) $\left(\overrightarrow{RI},\overrightarrow{RM},\overrightarrow{RS}\right)$.
e) $\left(\overrightarrow{DL},\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DH}\right)$. f) $\left(\overrightarrow{KG},\overrightarrow{KT},\overrightarrow{KU}\right)$. g) $\left(\overrightarrow{FI},\overrightarrow{FM},\overrightarrow{FH}\right)$. h) $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{NL}\right)$.
i) $\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{FS},\overrightarrow{GC}\right)$.

Exercice 193. Donnez 5 bases distinctes à partir des points apparaissant sur le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$.

Exercice 194. On considère un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$. Les autres points sont les milieux des arêtes. Donnez à chaque fois les coordonnées du vecteur dans la base proposée.

a) $\overrightarrow{AG}$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$. b) $\overrightarrow{DB}$ et $\left(\overrightarrow{HD},\overrightarrow{HE},\overrightarrow{HG}\right)$. c) $\overrightarrow{DH}$ et $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BF}\right)$.
d) $\overrightarrow{AN}$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$. e) $\overrightarrow{QM}$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$. f) $\overrightarrow{PJ}$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

Exercice 195. Dites si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ou pas dans les cas suivants.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$. b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-8\\-16\\-57\end{pmatrix}$. c) $\vec{u}\begin{pmatrix}\pi\\1\\\sqrt{\pi}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{\pi^3}\\\sqrt{\pi}\\\pi\end{pmatrix}$. d) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Exercice 196. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ des vecteurs de l'espace relativement à une base $\mathscr{B}$. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ constituent-ils une base de l'espace ?

Exercice 197. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}$ des vecteurs de l'espace relativement à une base $\mathscr{B}$. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ constituent-ils une base de l'espace ?

Définition 31. Soient $\mathscr{B} = (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ une base de $\vec{\mathscr{E}}$ et A un point de l'espace. La 4-liste $(A;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est appelée *un repère de l'espace $\mathscr{E}$*.

Si M est un point de l'espace on appelle *coordonnées de M dans le repère* $(A;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans la base $\mathscr{B}$.

Remarques.

1. Les coordonnées de M et $\overrightarrow{AM}$ sont égales. On dira que $\overrightarrow{AM}$ est le *vecteur position* de M dans le repère. En mécanique l'utilisation du vecteur position plutôt que du point est importante : la dérivée du vecteur position est le vecteur vitesse, la dérivée du vecteur vitesse est le vecteur accélération or le vecteur accélération est (presque) homogène à une force donc un vecteur.
2. On retrouve les résultats déjà connus sur les vecteurs du plan : les coordonnées de la somme de vecteurs sont les sommes des coordonnées et les coordonnées d'un vecteur multiplié par un nombre sont les coordonnées multipliées par ce nombre.
3. Les coordonnées d'un point se notent usuellement en ligne.
4. Ce n'est qu'à cette étape de la leçon que nous voyons que des points de l'espace se décrivent avec trois coordonnées.

Exercice 198. On considère une pavé droit $ABCDEFGH$. Donnez les coordonnées du point dans le repère proposé.

a) D dans $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$. b) G dans $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$. c) K dans $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.
d) D dans $\left(A;\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right)$.

Proposition 66. Soient $\mathscr{B} = (A;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ un repère de l'espace $\mathscr{E}$, M et P deux points de l'espace dont les coordonnées relativement à $\mathscr{R}$ sont respectivement (x_M,y_M,z_M) et (x_P,y_P,z_P). Les coordonnées de $\overrightarrow{MP}$ relativement à la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ de l'espace vectoriel $\vec{\mathscr{E}}$ sont $(x_P - x_M, y_P - y_M, z_P - z_M)$.

Démonstration. $\overrightarrow{MP} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AP}$.

Exercice 199. Soient $A(3,-2,-4)$, $B(4,-3,-2)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$.

1. Déterminez les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u} + \vec{v}$.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils liés ?

Exercice 200. Soient $A(1,2,3)$, $B(2,0,3)$, et $C(6,3,8)$ des points de l'espace rapporté à un repère, $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}$ des vecteurs de l'espace.

1. Démontrez que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants.
2. Déterminez α, β et γ tels que : $\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$.
3. Déterminez α', β' et γ' tels que : $\overrightarrow{BC} = \alpha'\vec{u} + \beta'\vec{v} + \gamma'\vec{w}$.
4. Déduisez-en les coordonnées du point C dans le repère $(A;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Exercice 201. On considère les points $A(1,2,3)$, $B(-1,1,4)$ et $C(3,5,-2)$ dans un repère (O,I,J,K). Déterminez les coordonnées du point D telles que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 202. On considère les points $A(1,2,1)$, $B(3,-1,2)$ et $C(-1,3,4)$ dans un repère (O,I,J,K).

1. Déterminez les coordonnées du milieu de $[AC]$.
2. Déterminez les coordonnées de D telles que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 203. Soient les points $A(-1;4,-3)$ et $B(2;1;3)$ dans un repère (O,I,J,K). Déterminez les coordonnées du point M vérifiant $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Exercice 204. On considère les points $A(0,1,1)$, $B(2,1,1)$, $C(3,1,1)$ et $D(1,1,1)$ dans un repère (O,I,J,K).

1. Démontrez que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Soit $E(2,2,4)$. Déterminez les coordonnées du point F telles que $ACEF$ soit un parallélogramme.
3. Soient J le milieu de $[EF]$ et I le point tel que F soit le milieu de $[AI]$. Démontrez que J est le milieu de $[IC]$.

Exercice 205. Soient $A(1,2,1)$, $B(1,-1,1)$ et $C(3,1,2)$ trois points de l'espace rapporté à un repère. On note I le milieu de $[BC]$.

1. Déterminez les coordonnées du point G (centre de gravité du triangle ABC) défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
2. On considère le point $E(3,7,2)$. Déterminez les coordonnées du point F tel que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$.
3. On note J le milieu de $[BE]$. Les points G, J et F sont-ils alignés ?

VII Norme d'un vecteur.

Définition 32. Soient $\mathscr{B}$ une base de l'espace vectoriel $\vec{\mathscr{E}}$, $\vec{u} \in \vec{\mathscr{E}}$, (x,y,z) les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathscr{B}$. On appelle *norme (euclidienne) de $\vec{u}$ relativement à $\mathscr{B}$* le réel positif : $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Exemples.

1.

VIII Changement de base.

Exercice 206. Soient $A(2,4,-1)$, $B(3,1,2)$, $C(1,0,1)$, $D(3,2,1)$ et $E(1,2,0)$.

1. Démontrez que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas liés (ils sont linéairement indépendants).
2. Le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ peut-il être un repère de l'espace ?
3. Déterminez les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
4. Déterminez α, β, γ tels que : $\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{AD}$. Quelles sont les coordonnées de E dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$?

IX Corrections.

Exercice 172. Les fonctions f_k sont dérivables sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_k'(x) = 1 - k\mathrm{e}^{-x}$.

$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = k \Leftrightarrow x = \ln(k)$

$f_k(\ln(k)) = \ln(k) + 1$

Donc $A_k\left(\ln(k)\ ;\ \ln(k) + 1\right)$

Les points A_k sont donc bien alignés puisque leurs coordonnées vérifient l'équation $y = x + 1$

Exercice 173. Avec la relation de Chasles.

Exercice 174.

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HI}$. b) $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CA}$. c) $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{ED}$.
d) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HE}$. e) $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AG}$. f) $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BF}$.
g) $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{GD}$. h) $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{IB}$. i) $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{DB}$.

Exercice 175.

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$. b) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{GE}$. c) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$. d) $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DE}$.
e) $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{EA}$. f) $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$. g) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$. h) $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BE}$.
i) $\overrightarrow{BH} =?$. j) $\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{FA}$. k) $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{CD}$. l) $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{HF}$.
m) $\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{DB}$. n) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$. o) $\overrightarrow{DF} =?$. p) $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CF}$.
q) $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$. r) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DG}$. s) $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CH}$. t) $\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{FB}$.
u) $\overrightarrow{HB} =?$. v) $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BG}$. w) $\overrightarrow{GA} =?$. x) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
y) $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$.

Exercice 176.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$. b) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{AH}$.
c) $\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CF}$. d) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AF}$.
e) $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{EA} =?$. f) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{AD}$.

Exercice 177.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
b) $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FH} = 2\overrightarrow{FQ}$.
c) $\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DG}$.
d) $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GD}$.
e) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AG}$.
f) $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GA}$
g) $\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GB}$.
h) $\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FD}$

Exercice 178.

a) $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{PM} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{PQ}$.
b) $\overrightarrow{DK} + \overrightarrow{IS} + \overrightarrow{TP} = \overrightarrow{DP}$.
c) $3 \cdot \overrightarrow{DL} + 2 \cdot \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{DT}$.
d) $\overrightarrow{CB} + 2 \cdot \overrightarrow{UP} = \overrightarrow{DF}$.
e) $\overrightarrow{SI} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{TF}$.
f) $2 \cdot \overrightarrow{HQ} + 2 \cdot \overrightarrow{HP} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{HD}$.
g) $\overrightarrow{DE} - 2 \cdot \overrightarrow{UH} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{DE}$.

Exercice 179.

a) $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.
$\vec{u} = 1\vec{v} + 1\vec{w}$.
b) $\vec{u} = \overrightarrow{BD}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{BA}$.
$\vec{u} = -1\vec{v} + 1\vec{w}$.
c) $\vec{u} = \overrightarrow{DG}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$.
$\vec{u} = 1\vec{v} + 1\vec{w}$.
d) $\vec{u} = \overrightarrow{FC}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{HD}$.
$\vec{u} = 1\vec{v} + 1\vec{w}$.
e) $\vec{u} = \overrightarrow{MI}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AI}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{GT}$.
$\vec{u} = 0\vec{v} + 2\vec{w}$.
f) $\vec{u} = \overrightarrow{QM}$, $\vec{v} = \overrightarrow{HE}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{EF}$.
$\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$.
g) $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$.
Impossible.
h) $\vec{u} = \overrightarrow{DJ}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{s} = \overrightarrow{CD}$.
$\vec{u} = 1\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}$.
i) $\vec{u} = \overrightarrow{HF}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{s} = \overrightarrow{AE}$.
$\vec{u} = 1\vec{v} - 1\vec{w} + 0\vec{s}$.
j) $\vec{u} = \overrightarrow{AP}$, $\vec{v} = \overrightarrow{IB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{DL}$ et $\vec{s} = \overrightarrow{CT}$.
$\vec{u} = 1\vec{v} - 2\vec{w} + 2\vec{s}$.
k) $\vec{u} = \overrightarrow{DS}$, $\vec{v} = \overrightarrow{KS}$, $\vec{w} = \overrightarrow{EQ}$ et $\vec{s} = \overrightarrow{AK}$.
$\vec{u} = 1\vec{v} - 2\vec{w} + 1\vec{s}$.
l) $\vec{u} = \overrightarrow{PB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{UK}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$ et $\vec{s} = \overrightarrow{DL}$.
$\vec{u} = 1\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w} + 2\vec{s}$.

Exercice 180.

a) $B(-4)$ dans $(A; \vec{u})$.
b) $H(-1)$ dans $(B; \vec{v})$.
c) $G(-2)$ dans $(D; 2\vec{u})$.
d) $E(-2{,}5)$ dans $(F; 2\vec{v})$.
e) $A(-0{,}25)$ dans $(D; 2\vec{v})$.

Exercice 181.

a) (AB).
b) (HA).
c) (MI).
d) (KU).
e) (AM).
f) (BP).
g) (SU).
h) (TU).
i) (IE).
j) (GF).
k) (IG).
l) (IG).

Exercice 182.

a) $A(-1,-2{,}1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$, $\begin{cases} x = -t-1 \\ y = -2t-2 \\ z = t+1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

b) $A(1{,}0{,}0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$, $\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -t \\ z = 4t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

c) $A(17{,}37{,}0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{cases} x = 17 \\ y = t+37 \\ z = 0 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

d) $A(100; 2{,}4; -\frac{1}{3})$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{\pi}\\3\times10^2\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$, $\begin{cases} x = \sqrt{\pi}t+100 \\ y = 3\times10^2 t+2{,}4 \\ z = \frac{2}{3}t-\frac{1}{3} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

e) $A(2{,}3{,}4)$ et $B(-2{,}6{,}5)$, $\begin{cases} x = -4t+2 \\ y = 3t+3 \\ z = t+4 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

f) $A(6,-2,1)$ et $B(1,2,-1)$, $\begin{cases} x &= -5t+6 \\ y &= 4t-2 \\ z &= -2t+1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

g) $A(5,7,0)$ et $B(0,1,2)$, $\begin{cases} x &= -5t+5 \\ y &= -6t+7 \\ z &= 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

h) $A(1,2,3)$ et $B(-2,2,2)$, $\begin{cases} x &= -3t+1 \\ y &= 2 \\ z &= -t+3 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

i) $A(0,-1,1)$ et $B(0,2,1)$, $\begin{cases} x &= 0 \\ y &= 3t-1 \\ z &= 1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

j) $A(2,0,4)$ et $B(1,0,3)$, $\begin{cases} x &= -t+2 \\ y &= 0 \\ z &= -t+4 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

k) $A(1,-1,0)$ et $B(0,2,0)$, $\begin{cases} x &= -t+1 \\ y &= 3t-1 \\ z &= 0 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

l) $A(0,0,3)$ et $B(0,0,-2)$, $\begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= -5t+3 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 183. Les A sont obtenus avec $t = 0$ et B avec $t = 1$.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ $A(1;-3;2)$ et $B(4;-1;-2)$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ $A(2;-2;3)$ et $B(0;-1;9)$.

c) $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $A(1;-3;2)$ et $B(1;-4;3)$.

d) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $A(0;-3;4)$ et $B(1;0;4)$.

Exercice 184.

a) $\begin{cases} 2t_1+1 = 4t_2-5 \\ t_1+1 = -t_2+7 \\ -4t_1+2 = -2t_2-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 2t_2-3 \\ 2t_2-3+1 = -t_2+7 \\ -4(2t_2-3)+2 = -2t_2-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t_1+1 = 4t_2-5 \\ t_2 = 3 \\ t_2 = 6 \end{cases}$. Aucun point d'intersection.

b) $\begin{cases} -t_1+2 = t_2-2 \\ t_1+3 = -3t_2+1 \\ t_1 = t_2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -t_2+4 \\ -t_2+4+3 = -3t_2+1 \\ -t_2+4 = t_2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -t_1+2 = t_2-2 \\ t_2 = -3 \\ t_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$. Aucun point d'intersection.

Exercice 185.

a) $t_1 = -1$ et $t_2 = 0$.

b) $t_1 = t_2 = 1$.

Exercice 186.

a) Oui pour $t = 5$.
b) Non : $13 = 4t-3 \Leftrightarrow T = 4$ mais $12 = 5t-10 \Leftrightarrow t = \frac{22}{5}$.
c) Non : si $z_A = 12$ alors $z_A \neq 13$.
d) $-21 = 3t \Leftrightarrow t = -7$ or $-7 \times (-7)+1 = 50$ donc oui.

Exercice 187.

a) $C \in (DEF)$.
b) $G \in (HCD)$.
c) $A \in (EFB)$.
d) $G \in (BCF)$.
e) $M \in (FHG)$.
f) $L \in (UJT)$.
g) $U \in (PRM)$.
h) $Q \in (LBS)$.
i) $N \in (MJI)$.
j) $J \in (DNH)$.
k) $S \in (NGT)$.
l) $G \in (PQN)$.
m) $? \in (RQM)$.
n) $T \in (USR)$.
o) $B \in (HRT)$.

Exercice 188. Par exemple : A, B, F et G. Choisissez trois points qui forment forcément un plan puis un point extérieur à ce plan.

Exercice 189.

a) $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. b) $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$. c) $\overrightarrow{IK} = 0\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. d) $\overrightarrow{LB} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.
e) $\overrightarrow{DU}$ impossible. f) $\overrightarrow{FP} = -\overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$. g) $\overrightarrow{EJ} = 0\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{QC}$. h) $\overrightarrow{IM} = 0\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$.
i) $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{BA}$.

Exercice 190.

a) (ODJ) $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{JS}\right)$. b) (BCJ) $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CJ}\right)$. c) (ADK) $\left(\overrightarrow{DK},\overrightarrow{SA}\right)$.
d) (SDC) $\left(\overrightarrow{CK},\overrightarrow{DK}\right)$. e) (DOC) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{FD}\right)$. f) (ABS) $\left(\overrightarrow{OF},\overrightarrow{DC}\right)$.

Exercice 191.

a) (BFC). b) (NRS). c) (URT). d) (MFG). e) (KPL).
f) (UEP). g) (HMI). h) (DUM). i) (UBT).

Exercice 192.

a) $\left(\overrightarrow{AL},\overrightarrow{CJ},\overrightarrow{BS}\right)$ non. b) $\left(\overrightarrow{KD},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BF}\right)$ oui. c) $\left(\overrightarrow{DI},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{PF}\right)$ non.
d) $\left(\overrightarrow{RI},\overrightarrow{RM},\overrightarrow{RS}\right)$ non. e) $\left(\overrightarrow{DL},\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DH}\right)$ oui. f) $\left(\overrightarrow{KG},\overrightarrow{KT},\overrightarrow{KU}\right)$ non.
g) $\left(\overrightarrow{FI},\overrightarrow{FM},\overrightarrow{FH}\right)$ oui. h) $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{NL}\right)$ oui. i) $\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{FS},\overrightarrow{GC}\right)$ non.

Exercice 193. $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$, $\left(\overrightarrow{DK},\overrightarrow{DL},\overrightarrow{DU}\right)$, $\left(\overrightarrow{QM},\overrightarrow{NG},\overrightarrow{PU}\right)$, $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BF}\right)$, $\left(\overrightarrow{DK},\overrightarrow{DR},\overrightarrow{DH}\right)$.

Exercice 194.

a) $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. b) $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. c) $\overrightarrow{DH}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. d) $\overrightarrow{AN}\begin{matrix}1\\1/2\\1\end{matrix}$. e) $\overrightarrow{QM}\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\0\end{pmatrix}$. f) $\overrightarrow{PJ}\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\-1\end{pmatrix}$.

Exercice 195.

a) $1 \times 3 = 3$ mais $-2 \times 3 \neq 1$ donc pas colinéaires.
b) $1 \times (-8) = -8$ mais $7 \times (-8) \neq 57$ donc pas colinéaires.
c) $\vec{v} = \sqrt{\pi}\vec{u}$ donc colinéaires.
d) $\vec{v} = 0\vec{u}$.

Exercice 196.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & & & = & 0 \\ 2x & & & + & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. .$$

Avec calculatrice une unique solution $x = y = z = 0$.

Exercice 197. Ils constituent une base de l'espace si et seulement si ils sont linéairement indépendants.

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$.

Autrement dit en considérant les coordonnées :

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 4z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{array} .$$

En échelonnant : $L_2 \to L_2 - 2L_1$ et $L_3 \to L_3 - 3L_1$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 4z & = & 0 \\ & & 3y & - & 9z & = & 0 \\ & & 4y & - & 10z & = & 0 \end{array} .$$

Puis : $L_3 \to 3L_3 - 4L_2$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 4z & = & 0 \\ & & 3y & - & 9z & = & 0 \\ & & & & 6z & = & 0 \end{array} .$$

Puis en substituant : $z = y = x = 0$.

Les vecteurs sont donc linéairement indépendants et donc forment une base de l'espace.

Exercice 198.

a) $D(0;1;0)$. b) $G(1;1;1)$. c) $K\left(\frac{1}{2},1;0\right)$. d) $D(0;1;0)$.

Exercice 199.

1. $\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

   $M(4,-3,-2)$.

2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{AB}=\vec{u}+\vec{v}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}-\vec{u}-\vec{v}=\vec{0}$, il existe doc une combinaison linéaire à coefficients non tous nuls qui égale le vecteur nul, donc la famille est liée.

Exercice 200.

1. $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2\alpha-\beta=0\\-\alpha-3\gamma=0\\3\beta+\gamma=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\alpha=\beta=\gamma=0.$

2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}.\left\{\begin{array}{l}2\alpha-\beta=1\\-\alpha-3\gamma=-2\\3\beta+\gamma=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\beta=2\alpha-1\\\gamma=-\frac{1}{3}\alpha+\frac{2}{3}\\3(2\alpha-1)+\left(-\frac{1}{3}\alpha+\frac{2}{3}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\alpha=1/5\\\beta=-3/5\\\gamma=9/5\end{array}\right..$

3. $\alpha'=4$, $\beta'=4$ et $\gamma'=-7$.

4. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\frac{1}{5}\vec{u}-\frac{3}{5}\vec{v}+\frac{9}{5}\vec{w}+4\vec{u}+4\vec{v}-7\vec{w}$. $C\left(\frac{21}{5},\frac{17}{5},-\frac{26}{5}\right)$ dans le repère $(A;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Exercice 201. $x_C-x_D=x_B-x_A\Leftrightarrow 3-x_D=-1-1\Leftrightarrow x_D=5$.
$y_C-y_D=y_B-y_A\Leftrightarrow 5-y_D=1-2\Leftrightarrow y_D=6$.
$z_C-z_D=z_B-z_A\Leftrightarrow -2-z_D=4-3\Leftrightarrow z_D=-3$.

$$\boxed{D(5;6;-3).}$$

Exercice 202. $x_C-x_D=x_B-x_A\Leftrightarrow -1-x_D=3-1\Leftrightarrow x_D=-3$.
$y_C-y_D=y_B-y_A\Leftrightarrow 3-y_D=-1-2\Leftrightarrow y_D=6$.
$z_C-z_D=z_B-z_A\Leftrightarrow 4-z_D=2-1\Leftrightarrow z_D=3$.

$$\boxed{D(-3,6,3).}$$

Exercice 203. $x_A-x_M+x_B-x_A=\frac{1}{3}(x_B-x_A)\Leftrightarrow -1-x_M+1-x_M=\frac{1}{3}(2-(-3))$

Exercice 204.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ et $ABCD$ est un parallélogramme.

2. $ACEF$ est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{FE}$. Or $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FE}\begin{pmatrix}2-x\\2-y\\4-z\end{pmatrix}$ donc $F(-1;2;4)$.

3. $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{IF}=\overrightarrow{FA}\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}$. Ainsi $ECFI$ est un parallélogramme. Comme J est le milieu de la diagonale $[EF]$ c'est aussi le milieu de la diagonale $[CI]$.

Exercice 205.

1. $I\left(2;0;\frac{3}{2}\right)$ $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x-1=\frac{2}{3}(2-1)\\y-2=\frac{2}{3}(0-2)\\z-1=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}-1\right)\end{array}\right.$, $G\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$.

2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}$. $F(3;4;2)$.

3. $J\left(2;3;\frac{3}{2}\right)$. $\overrightarrow{GJ}\begin{pmatrix}1/3\\7/3\\1/6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JF}\begin{pmatrix}1\\1\\1/2\end{pmatrix}$ Les points ne sont pas alignés.

Exercice 206.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\3\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-4\\2\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$. Si $\left\{\begin{array}{r}\alpha-\beta+\gamma=0\\-3\alpha-4\beta-2\gamma=0\\3\alpha+2\beta+2\gamma=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r}\alpha-\beta+\gamma=0\\-7\beta+\gamma=0\\5\beta-\gamma=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r}\alpha-\beta+\gamma=0\\-7\beta+\gamma=0\\-2\beta=0\end{array}\right.$ puis par substitution alors $\alpha=\beta=\gamma$.
2. On a une 4-liste formée d'un point et de trois vecteurs linéairement indépendants donc il s'agit bien d'un repère de l'espace.
3. $\overrightarrow{AM}=\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}$.
4. $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$. $\left\{\begin{array}{r}\alpha-\beta+\gamma=-1\\-3\alpha-4\beta-2\gamma=-2\\3\alpha+2\beta+2\gamma=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r}\alpha-\beta+\gamma=-1\\-7\beta+\gamma=-5\\5\beta-\gamma=4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r}\alpha-\beta+\gamma=-1\\-7\beta+\gamma=-5\\-2\beta=-1\end{array}\right.$. $\beta=\frac{1}{2}$ Par substitution : $\gamma=-\frac{3}{2}$ puis $\alpha=1$. $E\left(1,\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$.

10. Orthogonalité de droites et de plans.

I Orthogonalité de deux droites.

Définition 33. Deux droites sont dites *orthogonales* si et seulement si un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.

Exemples.

1. Sur le pavé droit $ABCDEFGH$, les droites (AE) et (BC) sont orthogonales car $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.
2. Sur le pavé droit $ABCDEFGH$, les droites (AE) et (AB) sont orthogonales car $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Elles sont même perpendiculaires puisqu'elles sont sécantes en A.
3. Sur le pavé droit $ABCDEFGH$, les droites (AE) et (AF) ne sont orthogonales car $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} \neq 0$.

Remarques.

1. Rappelons que des vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.
2. Des droites peuvent être orthogonales sans être sécantes. Deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement perpendiculaires. Dans ce cas on dit qu'elles sont non coplanaires.

Proposition 67.

(i) Deux droites sont orthogonales si et seulement si tout vecteur directeur de l'une est orthogonal à tout vecteur directeur de l'autre.
(ii) Deux droites sont orthogonales si et seulement si il existe une troisième droite qui soit parallèle à l'une et perpendiculaire à l'autre.
(iii) Si deux droites sont parallèles alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.
(iv) Si deux droites sont orthogonales alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.
(v) Deux droites de l'espace sont perpendiculaires si et seulement si elles sont orthogonales et coplanaires.

Remarques.

1. Ces résultats n'ont pas besoin d'être appris. Avec un peu de bon sens on peut les retrouver. Nous les utiliserons assez peu et leur préférerons la définition.

Exercice 207. Dans le repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on donne $A(1;0;2)$, $B(3,-3,3)$ et $C(-2,2,14)$. Démontrez que (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Exercice 208. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $A(5,-1,-9)$, $B(7;3,-7)$, $C(9;13;19)$, $D(11;15;13)$ et $E(15;19;1)$.

1. Montrez que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

2. (a) Montrez que $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
   (b) Que pouvez-vous en déduite pour le point E ?
3. (a) Montrez que les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
   (b) Que pouvez-vous en déduite pour le point E ?
4. Que pouvez-vous en déduire pour les droites (AB) et (CD) ?

II Orthogonalité d'une droite et d'un plan.

Définition 34. *Une droite est dite orthogonale a un plan* si un vecteur directeur de la droite est orthogonal aux deux vecteurs d'une base du plan.

Remarques.

1. Si nous serons parfois amenés à démontrer une orthogonalité entre un plan et une droite en utilisant cette définition, nous lui préférerons la démonstration utilisant le vecteur normal (confer infra).

Exercice 209. Dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on donne $A(2,-3,4)$, $B(1,2,-11)$, $C(-4,5,-9)$, $D(-8,3,4)$ et $E(-3,10,6)$.

1. Démontrez que les points A, B et C définissent bien un plan.
2. Démontrez que les droites (AB) et (DE) sont orthogonales.
3. Démontrez que la droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

Proposition 68.

(i) Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si tout vecteur directeur de la droite est orthogonal à tout vecteur de la direction du plan.
(ii) Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
(iii) Si une droite est orthogonale à un plan alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan.
(iv) Si deux droites sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.
(v) Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.
(vi) Si deux plans sont orthogonaux à une même droite alors ils sont parallèles entre eux.

III Vecteur normal à un plan.

Définition 35. Nous dirons qu'un vecteur non nul $\vec{n}$ est *normal à un plan* $\mathscr{P}$ s'il existe une base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ de $\mathscr{P}$ dont les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux à $\vec{n}$.

Remarques.

1. Tout plan admet un vecteur normal. Si c'est intuitif, la justification apparaîtra clairement avec les équations cartésienne du plan. Vous pouvez également consulter la leçon sur le produit vectoriel de l'espace qui permet de construire un vecteur orthogonal à deux vecteurs non colinéaires.
2. Un vecteur non nul est normal à un plan si et seulement si il est orthogonal à tout vecteur de la direction de ce plan.

Exercice 210. L'espace étant muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(2,-3,5)$, $B(1,0,7)$ et $C(-4,1,3)$.

1. Démontrez que A, B et C définissent bien un plan.
2. Démontrez que $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Exercice 211. Soit $\mathscr{P}$ un plan dirigé par deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$ (autrement dit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base de $\mathscr{P}$). Déterminez les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal à $\mathscr{P}$.

Proposition 69. Étant donné un vecteur non nul $\vec{n}$ et un point A, il existe un unique plan normal à $\vec{n}$ et passant par A.

Remarques.

1. Ainsi pour définir un plan il n'est pas nécessaire de donner un point et une base : il suffit de donner un point et un vecteur normal.
2. Une façon de voir que nous utiliserons plus tard pour l'équation cartésienne : le plan est formée de l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.

Proposition 70.

(i) Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si un vecteur directeur de cette droite est colinéaire à un vecteur normal à ce plan.
(ii) Un droite est parallèle à un plan si et seulement si un vecteur directeur de cette droite est orthogonal à vecteur normal à ce plan.
(iii) Deux plans sont parallèles si et seulement si un vecteur normal à l'un est colinéaire à un vecteur normal de l'autre.

Remarques.

1. La première assertion sera très utilisée. Pour montrer une orthogonalité entre un plan et une droite nous nous contenterons de montrer la colinéarité d'un vecteur directeur et d'un vecteur normal.

Équations cartésiennes d'un plan.

Proposition 71. Si $\mathscr{P}$ est un plan de l'espace alors il existe $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ tel que $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points $M(x,y,z)$ vérifiant $ax+by+cz+d=0$.

Réciproquement toute équation de cette forme décrit un plan.

Remarques.

1. L'équation $ax+by+cz+d=0$ est appelée *une équation cartésienne* du plan.
2. Il n'y a pas unicité de l'équation cartésienne d'un plan. Si $ax+by+cz+d=0$ est une équation d'un plan alors $(ma)x+(mb)y+(mc)z+(md)=0$ en est aussi une. Les coefficients des diverses équations cartésiennes d'un même plan sont proportionnels les uns aux autres.

Proposition 72. Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$. Si $\mathscr{P}$ est le plan correspondant à l'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ alors $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$.

Exercice 212. Vérifiez que $3x-2y+z=2$ est une équation cartésienne du plan (ABC) où $A(1;1;1)$, $B(-1;-1;3)$ et $C(2;1;-2)$.

Remarques.

1. Ce résultat est très important dans la pratique : il permet, facilement, de passer d'un point et d'un vecteur normal à une équation cartésienne et réciproquement.

Exercice 213. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points : $A(4\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ 2\ ;\ 0)$ et $C(0\ ;\ 0\ ;\ 2)$.

1. Montrez que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).
2. Déduisez-en une équation cartésienne de (ABC).

Exercice 214. Déterminez un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ dont une équation cartésienne est $2x + y - 3z + 14 = 0$.

Nous appellerons *plan médiateur d'un segment* le (seul) plan orthogonal au segment et contenant son milieu. C'est en somme l'équivalent d'une médiatrice mais dans l'espace

Exercice 215. Soit $A(-1,2,5)$ un point de l'espace rapporté à un repère et $\vec{n}\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}$ un vecteur.

1. Déterminez une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.
2. Soit $B(3,8,7)$. Déterminez une équation du plan médiateur $\mathscr{P}'$ du segment $[AB]$.

Exercice 216. Soient $A(1,0,3)$, $B(2,2,7)$ et $C(-1,5,4)$ trois points de l'espace rapporté à un repère et $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x + y - z + 1 = 0$.

1. Démontrez que les points A, B et C définissent un plan.
2. Démontrez que $\mathscr{P}$ est le plan (ABC).
3. Déduisez-en un vecteur normal au plan (ABC).

Exercice 217. Dans l'espace rapporté à un repère, notons $\mathscr{P}$ le plan d'équation $2x + 3y - 7z - 14 = 0$ et $\mathscr{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -11 + 3t \\ z = 19 - 5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

Déterminez l'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

IV Orthogonalité de deux plans.

Définition 36. Soient $\mathscr{P}_1$ un plan de l'espace dont $\vec{n}_1$ est un vecteur normal, $\mathscr{P}_2$ un plan de l'espace dont $\vec{n}_2$ est un vecteur normal. $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont dits *orthogonaux* si et seulement si $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont orthogonaux.

Remarques.

1. Nous aurions pu choisir une définition affine de l'orthogonalité : deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont dits orthogonaux (ou perpendiculaires) si et seulement si l'un contient une droite qui est perpendiculaire à une droite de l'autre. Cependant cette définition met en jeux des existence qui sont difficiles à montrer contrairement à l'orthogonalité.

Exercice 218. Démontrez que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ d'équations respectives $2x + 3y + z = 0$ et $-x + 2y - 4z = 0$ sont orthogonaux.

Exercice 219. On donne les points suivants $A(-2,1,3)$ et $B(1,-2,2)$ et $C(4,1,-1)$.

1. Démontrez que les points A, B et C définissent un seul plan $\mathscr{P}$.
2. Déterminez une équation cartésienne d'un plan $\mathscr{P}'$ orthogonal à $\mathscr{P}$ passant par le point A.

V Projeté orthogonal d'un point sur un plan.

Définition 37. Soient M un point de l'espace, $\mathscr{P}$ un plan. Nous appellerons *projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$*, le point H intersection de $\mathscr{P}$ et de la droite orthogonale à $\mathscr{P}$ passant par M.

Remarques.

1. Cette définition est aussi une proposition puisqu'elle sous-entend l'existence et l'unicité du projeté orthogonal.

Exercice 220. Soit, dans l'espace rapporté à un repère, $\mathscr{P}$ le plan passant par le point $A(1,-2,1)$ et de vecteur normal $\vec{u}(-3,1,4)$. Déterminez les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point $B(-15,-10,4)$ sur le plan $\mathscr{P}$.

VI Distance d'un point à un plan.

Proposition 73. Le projeté orthogonal du point M sur le plan $\mathscr{P}$ est le point de $\mathscr{P}$ le plus proche de M.

Démonstration.

Définition 38. Nous appellerons distance d'un point A à un plan $\mathscr{P}$ la distance de A à sont projeté orthogonal sur $\mathscr{P}$.

Exercice 221. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal on considère les points $A(2,3,3)$, $B(-1,17,-17)$ et un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}$. On note $\mathscr{P}$ le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

1. Démontrez que $H(-9,5,-1)$ appartient à $\mathscr{P}$.
2. Démontrez que H est le projeté orthogonal de B sur $\mathscr{P}$ et déduisez-en la distance de B à $\mathscr{P}$.
3. Soit $C(5,11,-5)$. Justifiez que C est le projeté orthogonal de H sur (BC) puis calculez la distance de H à (BC).

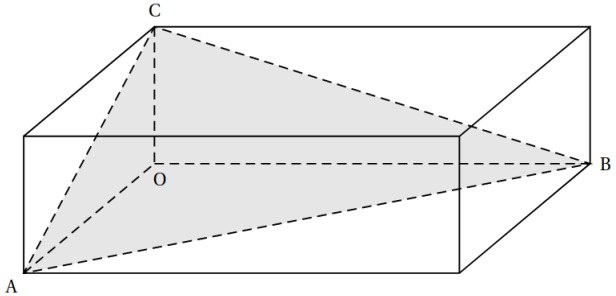
Exercice 222. Soient $A(8,10,5)$ un point et $\mathscr{P}$ le plan d'équation $2x+3y-z+1=0$ dans l'espace muni d'un repère. Déterminez les coordonnées du projeté orthogonal H du point A sur le plan $\mathscr{P}$.

Exercice 223. Soient $A(1;0;-2)$, $B(0;3;-1)$, $C(-1;2;1)$, $D(0;-1;0)$ et $S\left(\frac{5}{2};-\frac{3}{2};4\right)$ des points de l'espace muni d'un repère orthonormé.

1. Démontrez que $ABCD$ est un rectangle.
2. (a) Montrez que si $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) alors, pour tout point M du plan (ABC), on a $SH=\frac{|\overrightarrow{SM}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$, où H est le projeté orthogonal de S sur le plan ABC.
   (b) Déterminez les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal au plan (ABC).
   (c) En déduire la hauteur SH de la pyramide $SABCD$.
3. Calculez le volume de la pyramide $SABCD$.

VII Exercices.

Exercice 224. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points : A de coordonnées $(2\,;\,0\,;\,0)$, B de coordonnées $(0\,;\,3\,;\,0)$ et C de coordonnées $(0\,;\,0\,;\,1)$.



L'objectif de cet exercice est de calculer l'aire du triangle ABC.

1. (a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

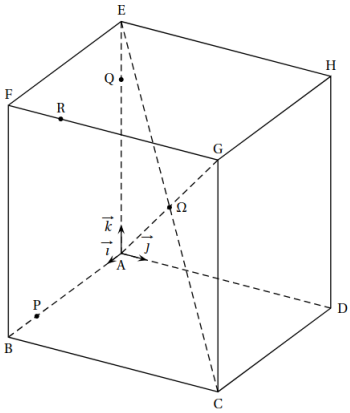
   (b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $3x+2y+6z-6=0$.
2. On note d la droite passant par O et orthogonale au plan (ABC).

   (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

   (b) Montrer que la droite d coupe le plan (ABC) au point H de coordonnées $\left(\frac{18}{49}\ ;\ \frac{12}{49}\ ;\ \frac{36}{49}\right)$.

   (c) Calculer la distance OH.
3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V=\dfrac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.
   En calculant de deux façons différentes le volume de la pyramide OABC, déterminer l'aire du triangle ABC.

Exercice 225. On considère un cube ABCDEFGH d'arête 8 cm et de centre Ω. Les points P, Q et R sont définis par $\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FR}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{FG}$. On se place dans le repère orthonormé $\left(A\ ;\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ avec : $\vec{\imath}=\dfrac{1}{8}\overrightarrow{AB}$, $\vec{\jmath}=\dfrac{1}{8}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k}=\dfrac{1}{8}\overrightarrow{AE}$.



Partie I

1. Dans ce repère, on admet que les coordonnées du point R sont $(8\,;\,2\,;\,8)$. Donner les coordonnées des points P et Q.

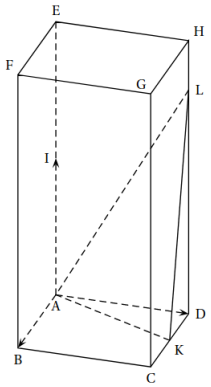
2. Montrer que le vecteur $\vec{n}(1\ ;\ -5\ ;\ 1)$ est un vecteur normal au plan (PQR).
3. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (PQR) est $x - 5y + z - 6 = 0$.

Partie II

On note L le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (PQR).

1. Justifier que les coordonnées du point Ω sont $(4\,;\,4\,;\,4)$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite d perpendiculaire au plan (PQR) et passant par Ω.
3. Montrer que les coordonnées du point L sont $\left(\dfrac{14}{3}\ ;\ \dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{14}{3}\right)$
4. Calculer la distance du point Ω au plan (PQR).

Exercice 226. On considère un pavé droit ABCDEFGH tel que AB = AD = 1 et AE = 2, représenté ci- dessous. Le point I est le milieu du segment [AE]. Le point K est le milieu du segment [DC]. Le point L est défini par : $\overrightarrow{DL} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AI}$. N est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).



On se place dans le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AI}\right)$. On admet que le point L a pour coordonnées $\left(0\ ;\ 1\ ;\ \dfrac{3}{2}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$.
2. (a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(6\ ;\ -3\ ;\ 2)$ est un vecteur normal au plan (AKL).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (AKL).
   (c) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (AKL).
   (d) En déduire que le point N de coordonnées $\left(\dfrac{18}{49}\ ;\ \dfrac{40}{49}\ ;\ \dfrac{6}{49}\right)$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).

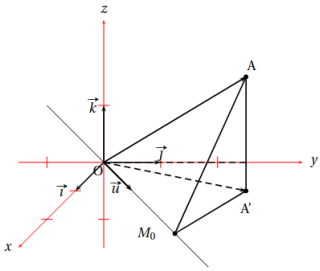
On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule : $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\times$(aire de la base)$\times$ hauteur.

3. (a) Calculer le volume du tétraèdre ADKL en utilisant le triangle ADK comme base.
   (b) Calculer la distance du point D au plan (AKL).
   (c) Déduire des questions précédentes l'aire du triangle AKL.

Exercice 227.

Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ on considère

- le point A de coordonnées $(1\,;\,3\,;\,2)$,
- le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$
- la droite d passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur $\vec{u}$.



Le but de cet exercice est de déterminer le point de d le plus proche du point A et d'étudier quelques propriétés de ce point. On pourra s'appuyer sur la figure ci-contre pour raisonner au fur et à mesure des questions.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.
2. Soit t un nombre réel quelconque, et M un point de la droite d, le point M ayant pour coordonnées $(t\ ;\ t\ ;\ 0)$.
   (a) On note AM la distance entre les points A et M. Démontrer que : $AM^2 = 2t^2 - 8t + 14$.
   (b) Démontrer que le point M_0 de coordonnées $(2\ ;\ 2\ ;\ 0)$ est le point de la droite d pour lequel la distance AM est minimale. On admettra que la distance AM est minimale lorsque son carré AM^2 est minimal.
3. Démontrer que les droites (AM_0) et d sont orthogonales.
4. On appelle A' le projeté orthogonal du point A sur le plan d'équation cartésienne $z = 0$. Le point A' admet donc pour coordonnées $(1\ ;\ 3\ ;\ 0)$. Démontrer que le point M_0 est le point du plan $(AA'M_0)$ le plus proche du point O, origine du repère.
5. Calculer le volume de la pyramide $OM_0A'A$. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.

Exercice 228.

1. Soient A et B deux points distincts de l'espace et soit I le milieu du segment $[AB]$.
   (a) Démontrez que pour tout point M de l'espace, $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}$.
   (b) Déduisez-en que l'ensemble des points M de l'espace, équidistants de A et de B, est le plan passant par I milieu de $[AB]$ et admettant pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{AB}$ (plan médiateur de $[AB]$).
2. Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(2,-1;3)$ et $B(0;3;1)$. Déterminez une équation cartésienne du plan médiateur du segment $[AB]$.

Exercice 229. Soit $\mathscr{E}$ l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère les points $A(1,-2,-3)$, $B(0;0,-1)$ et $C(2,-3;4)$.

1. Montrez que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Déterminez un vecteur normal au plan (ABC).
3. Déduisez-en une équation cartésienne du plan (ABC).

Exercice 230. Soit $\mathscr{E}$ l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soit le plan (P) : $x + 2y - z + 3 = 0$ et le point $A(1;0;2)$.

1. Déterminez un vecteur $\vec{n}$ normal au plan (P). Déterminez une représentation paramétrique de la droite (D) passant par A et perpendiculaire au plan (P).

2. Déduisez-en les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur le plan (P).
3. Calculez la distance AH, distance du point A au plan (P).

VIII Corrections.

Exercice 207. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\2\\12\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$. Il faut penser en plus de l'orthogonalité à vérifier l'intersection : A appartient bien sûr au deux droites. $(AB)\perp(AC)$.

Exercice 208.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\2\\-6\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ donc les droites sont orthogonales.
2. (a) $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}10\\20\\10\end{pmatrix}$. $5\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AE}$.
   (b) $E\in(AB)$.
3. (a) $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}6\\6\\-18\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\12\\20\end{pmatrix}$.
   (b) $E\in(AB)$
4. (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercice 209.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\5\\-15\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\8\\-13\end{pmatrix}$ et $\frac{-1}{-6}\neq\frac{5}{8}$ donc ils ne sont pas colinéaires (ils sont linéairement indépendants) et donc ils forment une base du plan. A, B et C définissent bien une base.
2. $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}5\\7\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}=-1\times5+5\times7+(-15)\times2=0$. Les droites (AB) et (DE) sont orthogonales.
3. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DE}=-6\times5+8\times7+(-13)\times2=0$ donc $\overrightarrow{DE}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui forment une base de (ABC) donc la droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

Exercice 210.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$. A, B et C définissent bien un plan.
2. Démontrez que $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Exercice 211. $\vec{n}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. Supposons par exemple $x=1$. $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ donc $1\times1+1\times y+2\times z=0$ et $-1\times1+2\times y+-3\times z=0$. Donc $\begin{cases}y+z=-1\\2y-3z=1\end{cases}$. $z=-\frac{3}{5}$ et $y=-\frac{4}{5}$.

Exercice 212. $3x_A-2y_A+z_A=3\times1-2\times1+1=2$ donc A appartient au plan décrit par l'équation cartésienne. De même pour les autres points.

Exercice 213.

1. $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ donc $vezcn$ est normal à (ABC).
2. $1x+1y+2z+d=0$ car $\vec{n}$ est normal au plan. $A\in(ABC)$ donc on doit avoir : $4+0+0+d=0\Leftrightarrow d=-4$. Enfin $(ABC):\ x+y+2z-4=0$.

Exercice 214. $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$.

Exercice 215.

1. $-3x + y + 4z + d = 0$. $A \in \mathscr{P}$ donc $-3 \times (-1) + 2 + 4 \times 5 + d = 0 \Leftrightarrow d = -25$
2. $\vec{n}$ est normal à $\mathscr{P}'$ et contient I le milieu de $[AB]$. $I(1;5;6)$. $-3\times1+5+4\times6+d' = 0 \Leftrightarrow d' = -26$. $\mathscr{P}'$: $-3x + y + 4z - 26 = 0$.

Exercice 216.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}$.

   $\begin{vmatrix}1 & -2\\2 & 5\end{vmatrix} = 1 \times 5 - 2 \times (-2) = 9 \neq 0$.

   Donc vecteurs non nuls et non colinéaires A, B et Cdéfinissent bien un plan.
2. $2x_A + y_A - z_A + 1 = 2 \times 1 + 0 - 3 + 1 = 0$ donc $A \in \mathscr{P}$. De même pour B et C.
3. $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Exercice 217. $2 \times (-2 + t) + 3 \times (-11 + 3t) - 7 \times (19 - 5t) - 14 = 0 \Leftrightarrow 46t - 184 = 0 \Leftrightarrow t = -4$. D'où les coordonnées du point d'intersection : $x = -2 + +(-4) = -6$, $y = -11 + 3 \times (-4) = -23$ et $z = 19 - 5 \times (-4) = 39$.

Exercice 218. $\vec{n}_1\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2\begin{pmatrix}-1\\2\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.

Exercice 219.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\0\\-4\end{pmatrix}$.
2. Il faut trouver un vecteur normal à $\mathscr{P}$.

$$\begin{cases} 3 - 3y + z = 0 \\ 6 - 4z = 0 \end{cases}$$

   $z = \frac{3}{2}$ et $y = \frac{3}{2}$.

   $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$ est normal à $\mathscr{P}$.

   Clairement $\vec{m}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{n}$.D'où une équation d'un plan orthogonal : $3x-2y+d = 0$ et enfin $d = 8$.

Exercice 220. H appartient au plan d'équation $-3x+y+4z+d = 0$ et $-3\times1+(-2)+4\times1+d = 0 \Leftrightarrow d = 1$ donc $-3x + y + 4z + 1 = 0$. H appartient à la droite passant par B et de vecteur directeur $\vec{u}$ donc : $\begin{cases} x = -15 - 3t \\ y = -10 + t \\ z = 4 + 4t \end{cases}$. Coordonnées du point d'intersection : $-3(-15 - 3t) + (-10 + t) + 4(4 + 4t) = 0 \Leftrightarrow 45 + 9t - 10 + t + 16 + 16t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{31}{13}$ donc $H\left(-\frac{102}{13}, -\frac{161}{13}, -\frac{72}{13}\right)$.

Exercice 221.

1. Il faut et il suffit que $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = 0$.
2. H est le projeté orthogonal de B sur $\mathscr{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{HB}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires. Distance de B à $\mathscr{P}$: HB car h projeté orthogonal de B sur $\mathscr{P}$. Le repère étant orthonormal : $HB = ||\overrightarrow{HB}|| = \sqrt{8^2 + 12^2 + 16^2} = \sqrt{464}$.
3. C est le projeté orthogonal de H sur (BC) si et seulement si $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. $HC = \sqrt{216}$.

Exercice 222. $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$. La droite $(A,\vec{n})$ est donc perpendiculaire

à $\mathscr{P}$. Une représentation paramétrique de la droite $(A,\vec{n})$: $\left\{\begin{array}{l} x = 8+2t \\ y = 10+3t \\ z = 5-t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$. $\{H\} = (A,\vec{n}) \cap \mathscr{P}$ donc : $2(8+2t)+3(10+3t)-(5-t)+1 = 0 \Leftrightarrow 14t+41 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{41}{14}$ et donc $x_H = 8+2\times\frac{-41}{14} = \frac{30}{14}$, $y_H = 10+3\times\frac{-41}{14} = \frac{17}{14}$ et $z_H = 5-\frac{-41}{14} = \frac{29}{14}$.

Exercice 223.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ donc $ABCD$ est un parallélogramme. De plus $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$ donc le parallélogramme $ABCD$ est un rectangle.
2. (a) $\overrightarrow{SM}\cdot\vec{n} = \overrightarrow{SH}\cdot\vec{n}+\overrightarrow{HM}\cdot\vec{n} = \overrightarrow{SH}\cdot\vec{n}$. Or $\overrightarrow{SH}\cdot\vec{n} = SH\times\|\vec{n}\|\times\cos(\overrightarrow{SH},\vec{n}) = \varepsilon SH\times\|\vec{n}\|$ où $\varepsilon \in \{-1;1\}$ donc $\overrightarrow{SM}\cdot\vec{n} = \varepsilon SH\|\vec{n}\|$. En prenant la valeur absolue : $SH = \frac{|\overrightarrow{SM}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$.

   (b) $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est une base de (ABC). $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix}$. Donc $\vec{u}$ est normal à (ABC) si et seulement si $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u} = \overrightarrow{AC}\cdot\vec{u} = 0$. Déterminons, arbitrairement, $\vec{n}$ avec une première coordonnée égale à 1. On doit donc avoir : $\left\{\begin{array}{l} -1\times1+3\times y+1\times z = 0 \\ -2\times1+2\times y+3\times z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3y+z = 1 \\ 2y+3z = 2 \end{array}\right.$. Ainsi $y = \frac{1}{7}$ et $z = \frac{4}{7}$. Pour avoir des coordonnées entière on choisit $\vec{n}\begin{pmatrix}7\\1\\4\end{pmatrix}$.

   On pouvait aussi utiliser le produit vectoriel de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\times3-1\times2\\2\times(-2)-(-1)\times3\\-1\times2-3\times(-2)\end{pmatrix}$.

   (c) $\overrightarrow{SA}\begin{pmatrix}-3/2\\3/2\\-6\end{pmatrix}$. En utilisant la question précédente : $SH = \frac{|\overrightarrow{SA}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{\left|-\frac{3}{2}\times7+\frac{3}{2}\times1-6\times4\right|}{\sqrt{7^2+1^2+4^2}} = \frac{33}{\sqrt{86}}$
3. $\mathcal{V}(SABCD) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times AB\times AC\times SH = \frac{1}{6}\times\sqrt{11}\times\sqrt{17}\times\frac{33}{86}$.

Exercice 224.

1. (a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$. $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est une base de (ABC). $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} =$

   (b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $3x+2y+6z-6 = 0$.
2. On note d la droite passant par O et orthogonale au plan (ABC).
   (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.
   (b) Montrer que la droite d coupe le plan (ABC) au point H de coordonnées $\left(\frac{18}{49}\ ;\ \frac{12}{49}\ ;\ \frac{36}{49}\right)$.
   (c) Calculer la distance OH.
3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \dfrac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.
   En calculant de deux façons différentes le volume de la pyramide OABC, déterminer l'aire du triangle ABC.

Exercice 225.

Partie I

1. $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = 12\frac{1}{8}\overrightarrow{AB} = 12\vec{i}$ donc $\overrightarrow{AP}\begin{pmatrix}12\\0\\0\end{pmatrix}$. De même $\overrightarrow{AQ}\begin{pmatrix}0\\0\\12\end{pmatrix}$.
2. $\left(\overrightarrow{RP},\overrightarrow{RQ}\right)$ est une base de (PQR). $\overrightarrow{RP}\begin{pmatrix}4\\-2\\-8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RQ}\begin{pmatrix}-8\\-2\\4\end{pmatrix}$. $\vec{n}\cdot\overrightarrow{RP} = \vec{n}\cdot\overrightarrow{RQ} = 0$ donc $\vec{n}$ est normal à (PQR).
3. $\vec{n}$ est une vecteur normal au plan décrit par l'équation cartésienne et, de plus $8-5\times2+8-6 = 0$ donc R appartient à ce plan. Il s'agit donc bien de l'équation cartésienne de (PQR).

Partie II

1. $B(8;0;0)$ et $H(0;8;8)$ et Ω est milieu de $[AH]$ donc $\Omega\left(\frac{8+0}{2},\frac{0+8}{2},\frac{0+8}{2}\right)$.
2. $\vec{n}$ est normal à (PQR) donc est un vecteur directeur de la droite d perpendiculaire au plan (PQR). Comme de plus d passe par Ω on en déduit sa représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t+4 \\ y = -5t+4 \\ z = t+4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.
3. Les coordonnées proposées satisfont l'équation cartésienne de (PQR). De plus pour $t = \frac{2}{3}$ dans la précédente représentation paramétrique on obtient que les coordonnées correspondent bien à un point de d. Par construction de d son point d'intersection avec (PQR) est L ce qui permet de conclure.
4. La distance du point Ω au plan (PQR) est (le repère étant orthonormé car construit sur un cube) : $\left\|\overrightarrow{\Omega L}\right\| = \sqrt{\left(\frac{14}{3}-4\right)^2+\left(\frac{2}{3}-4\right)^2+\left(\frac{14}{3}-4\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{108} = 2\sqrt{3}$.

Exercice 226.

1. $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{AL}\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$.
2. (a) $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$ forment une base de (AKL). Avec les coordonnées : $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AK} = \vec{n}\cdot\overrightarrow{AL} = 0$. Donc $\vec{n}$ est normal à (AKL).
   (b) $\vec{n}$ est normal à (AKL) donc une équation cartésienne de la forme $6x-3y+2z+d=0$. De $A \in (AKL)$ on déduit $d=0$. (AKL) : $6x-3y+2z=0$.
   (c) Δ perpendiculaire à (AKL) et $\vec{n}$ orthogonal à (AKL) donc $\vec{n}$ est vecteur directeur de Δ.
   Δ passe ar D et de vecteur directeur $\vec{n}$ donc Δ : $\begin{cases} x = 6t \\ y = -3t+1 \\ z = 2t \end{cases}$.
   (d) $N\left(3\times\frac{3}{49};-3\times\frac{3}{49}+1;2\times\frac{3}{49}\right)$ donc $N \in \Delta$.
   $6x_N - 3y_N + 2z_N = 0$ donc $N \in (AKL)$.
   Comme $D \in \Delta$, $N \in \Delta \cap (AKL)$ et Δ perpendiculaire à (AKL), N est le projeté orthogonal de D sur (AKL).
3. (a) $\mathscr{V} = \frac{1}{8}$.
   (b) $d((AKL);D) = DN = \left\|\overrightarrow{DN}\right\| = \sqrt{x^2_{\overrightarrow{DN}}+y^2_{\overrightarrow{DN}}+z^2_{\overrightarrow{DN}}} = \frac{21}{7}$.
   (c) $\mathscr{A} = 3\times\frac{1}{ND}\mathscr{V} = \frac{1}{8}$.

Exercice 227.

1. La droite passe par O et a pour vecteur directeur $\vec{u}$ donc représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.
2. (a) $AM^2 = \left|\overrightarrow{AM}\right|^2 = (t-1)^2+(t-3)^2+2^2 = 2t^2-8t+14$.
   (b) $AM^2 = 2t^2-8t+14 = 2(t^2-4t+2^2)-8+14 = 2(t-2)^2+6$ donc minimum de 6 atteint pour $t=2$. AM minimum pour $t=2$ est la distance minimal est $\sqrt{6}$.
3. $\overrightarrow{AM_0}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AM_0}\cdot\vec{u} = 1\times1+(-1)\times1+(-2)\times0 = 0$ donc les droites sont orthogonales.
4. Nous venons de montrer que $\overrightarrow{AM_0}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux. On montre de même que $\overrightarrow{A'M_0}$ est orthogonal à $\vec{u}$. Ainsi $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs formant une base de $(AA'M_0)$ et donc $\vec{u}$ est normal à $(AA'M_0)$. M_0 est donc le projeté orthogonal de O sur $(AA'M_0)$ et M_0 réalise bien la distance minimale.
5. $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AA'\times A'M0\times OM_0$ or $AA' = 2$, $A'M_0 = \sqrt{6}$ et $OM_0 = 2\sqrt{2}$ donc $\mathcal{V} = \frac{8}{3}\sqrt{3}$.

Exercice 228.

1. (a) $MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}) = \overrightarrow{BA}\cdot2\overrightarrow{MI} = 2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}$.

(b) M équidistant de A et de B équivaut successivement à $MA^2 - MB^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ donc est le plan passant par I de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

2. $I\,(1;1;2)$ est le milieu de $[AB]$. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\4\\-2\end{pmatrix}$. M appartient au plan passant par I est de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ si et seulement si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM} = 0$. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM} = 0 \Leftrightarrow -2(x-1) + 4(y-1) + 2(z-2) = 0 \Leftrightarrow -2x + 4y + 2z - 6 = 0$.

Exercice 229.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-1\\7\end{pmatrix}$. $\frac{-1}{1} \neq \frac{-2}{-1}$ donc les vecteurs ne sont pas colinéaires et les points ne sont pas alignés.
2. D'après la question précédente $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base du plan. On cherche y et z tels que $\vec{u}(1;y;z)$ vérifie : $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. $\begin{cases} 1 \times (-1) + y \times (-2) + z \times 2 = 0 \\ 1 \times 1 + y \times (-1) + z \times 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (z = -\frac{1}{4}) \wedge (y = -\frac{3}{3})$. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1/4\\-3/4\end{pmatrix}$. On pouvait aussi utiliser un produit vectoriel.
3. $x - \frac{1}{4}y - \frac{3}{4}z + d = 0$. A appartient au plan donc : $1 - \frac{1}{4} \times (-2) - \frac{3}{4} \times (-3) + d = 0 \Leftrightarrow d = \frac{15}{4}$. $x - \frac{1}{4}y - \frac{3}{4}z - \frac{15}{4} = 0$.

Exercice 230.

1. $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$. $(D) : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t \\ z = -t + 2 \end{cases}$
2. $(t+1) + 2(2t) - (-t+2) + 3 = 0 \Leftrightarrow 6t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}$. $H\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$.
3. $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-1/3\\-2/3\\1/3\end{pmatrix}$. $AH = \frac{1}{3}\sqrt{6}$.

Théorie des probabilités.

11. Loi binomiale.

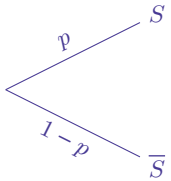
Dans cette leçon $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ désigne un espace probabiliste fini.
Les variables aléatoires définies sur Ω et à valeurs réelles seront notées X, Y, ou Z.

I Épreuve de Bernoulli.

Définition 39. Nous appellerons *épreuve de Bernoulli* toute expérience aléatoire dont l'univers ne comporte que deux issues.

Remarques.

1. Autrement dit on appelle épreuve de Bernoulli toute expérience aléatoire à laquelle on peut associer une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli.
2. L'une des issues est appelée *échec* et l'autre *succès*.
3. L'univers d'une épreuve de Bernoulli est $\{S; \overline{S}\}$.
4. La probabilité du succès est notée p est appelé *le paramètre* de l'épreuve de Bernoulli.
5. La probabilité de l'échec est souvent notée q. On a donc : $q = 1 - p$.
6. L'expression épreuve (plutôt que expérience aléatoire) est utilisée pour désigner une partie d'une expérience aléatoire complexe (formée de plusieurs épreuves). Une épreuve est, et donc peut être vue comme, une expérience à part entière.
7. Arbre pondéré représentant une épreuve de Bernoulli/



8. Une épreuve de Bernoulli est l'expérience aléatoire la plus simple possible. Avec une issue de moins on obtient une expérience déterministe et non pas probabiliste.

Exemples.

1. Typiquement il s'agit d'un pile ou face avec une pièce éventuellement truquée.
2. Lire le nombre obtenu en lançant un dé tétraédrique dont les faces sont numérotés de 1 à 4 n'est pas une épreuve de Bernoulli puisqu'il n'y a pas que deux issues.
3. Lancer deux fois d'affilée une pièce n'est pas une épreuve de Bernoulli. Il y a deux épreuves de Bernoulli.

Exercice 231. Dites si les expériences aléatoires suivantes sont des épreuves de Bernoulli.

1. Un stock contient 1 % de pièces défectueuses. On y prélève une pièce et on regarde sil elle présente un défaut.

2. Selon l'INSEE, 45 % des familles françaises ont un seul enfant, 38 % en ont deux et 17 % en ont trois ou plus. On interroge au hasard un élève et on lui demande le nombre d'enfants dans sa famille.

II Loi de Bernoulli.

Les résultats obtenus sur un pile ou face sont des lettres ce qui n'est pas le plus pratique pour modéliser mathématiquement. C'est pourquoi nous allons associer une variable aléatoire aux épreuves de Bernoulli.

Proposition 74. Une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ suit une *loi de Bernoulli de paramètre* p, si X compte le nombre de succès lors d'une épreuve de Bernoulli de paramètres p.

Remarques.

1. Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.
2. Si X suit une loi de Bernoulli alors $X(\Omega) = \{0; 1\}$.
3. Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p nous avons donc :

x	0	1
$\mathbb{P}(X = x)$	$1 - p$	p

III Moments d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli (rappels).

Proposition 75. Soient $p \in [0; 1]$, X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. $\mathbb{E}(X) = p$. $\mathbb{V}(X) = p(1 - p)$. $\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$.

Démonstration.

* Si $n \in \mathbb{N}^*$ désigne le nombre de valeurs prisent par la variable aléatoire :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i)x_i$$

Donc ici :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \mathbb{P}(X = x_1)x_1 + \mathbb{P}(X = x_2)x_2 \\ &= (1 - p) \times 0 + p \times 1 \\ &= p\end{aligned}$$

* Puisque

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right]$$

regardons la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y = (X - \mathbb{E}(X))^2$.

y_i	p^2	$(1 - p)^2$
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	$1 - p$	p

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= (1 - p) \times p^2 + p \times (1 - p)^2 \\ &= p^2 - p^3 + p - 2p^2 + p^3 \\ &= p - p^2 \\ &= p(1 - p)\end{aligned}$$

* Trivial.

Remarques.

1. On dit que la variance est un moment centré puisqu'on regarde l'écart par rapport à la moyenne : $X - \mathbb{E}(X)$.

Exercice 232. Une entreprise fabrique des assiettes. On sait que 6 % des assiettes produites présentent un défaut. On choisit une assiette au hasard. Soit X la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'assiette ne présente pas de défaut et 0 sinon.

1. Quelle loi suit X ?
2. Calculez $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$ et $\sigma(X)$.

IV Schéma de Bernoulli.

Définition 40. Nous appellerons *schéma de Bernoulli de paramètres n et p* toute expérience aléatoire constituée de la répétition de n épreuves de Bernoulli de paramètre p indépendantes.

Remarques.

1. Ainsi un schéma de Bernoulli est un type d'expérience aléatoire. Les expériences reconnues comme des schéma de Bernoulli présentent des caractéristiques communes qui permettront de les modéliser mathématiquement de la même façon (avec la même variable aléatoire).
2. L'indépendance signifie qu'une épreuve n'a pas d'influence sur les suivantes.

Exemples.

1. L'exemple typique est celui de la répétition de plusieurs piles ou face.

Exercice 233. Pour chacune des expériences aléatoires suivantes, dites si elle constitue un schéma de Bernoulli. Si oui donnez n et p.

1. Dans un stock de 20 vis, dont 3 sont trop longues, on prélève successivement 15 vis, au hasard et sans remise. Pour chacune on regarde si elle est trop longue ou non.
2. On considère une suite de 50 lettres choisies de façon aléatoire. Pour chacune d'entre elles, on regarde si elle est une voyelle ou non.

Exercice 234. Une chaîne de magasins de bricolage commercialise des ponceuses « elliptiques ». Statistiquement 8 % des ponceuses du stock sont défectueuses. On prélève au hasard 25 ponceuses elliptiques dans le stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. Démontrez que cette situation est un schéma de Bernoulli dont vous préciserez les paramètres.

V Arbre pondéré et schéma de Bernoulli.

L'arbre pondéré représentant un schéma de Bernoulli de paramètres n et p comporte :

— 2 branches à chaque embranchement conduisant aux nœuds S et $\overline{S}$ avec les probabilités p et $1 - p$,

— n niveaux

Exercice 235. Un appareil comporte deux composants électroniques qui fonctionnent de façon indépendante. On suppose que, pour chacun d'entre eux, la probabilité de l'événement P : « le composant tombe en panne » est égale à 0,01.

1. Justifiez que cette expérience est un schéma de Bernoulli dont vous préciserez les paramètres.

2. Représentez la situation par un arbre pondéré.
3. Calculez les probabilités des événements suivants.
   (a) Aucun des deux composants ne tombe en panne.
   (b) Un sel des deux composants tombe en panne.
   (c) Les deux composants tombent en panne.

Exercice 236. Sur son trajet domicile-travail un individu rencontre trois feux tricolores, indépendants les uns des autres. Il a remarqué que, statistiquement, chaque feu est au vert au moins une fois sur trois.

1. Justifiez que cette expérience est un schéma de Bernoulli dont vous préciserez les paramètres.
2. Représentez la situation par un arbre pondéré.
3. Pour un trajet domicile-travail calculez la probabilité des événements suivants.
   (a) Deux feux sur les trois sont au vert.
   (b) Un seul feu sur les trois est au vert.
   (c) Tous les feux sont au vert.
   (d) Aucun des trois feux n'est au vert.

VI Les issues d'un schéma de Bernoulli.

Les issues d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p est une n-liste d'un ensemble à 2 éléments (succès S et échec $\overline{S}$).

Nous en déduisons le nombre total d'issues du schéma : 2^n.

VII Variable aléatoire suivant une loi binomiale.

Proposition 76. Une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ qui compte le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p suit une *loi binomiale de paramètres n et p*, et nous noterons $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

Remarques.

1. Par définition $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ (en utilisant d'autres notations : $X \in \{0; 1; \ldots; n\}$).
2. En particulier si X suit une loi binomiale de paramètre $p \in [0; 1]$ alors $X \hookrightarrow \mathbb{B}(1,p)$.
3. Nous avons une autre définition avec les sommes de variables aléatoires : X suit une loi binomiale de paramètres n et p si X est la somme de n variables aléatoires indépendantes X_1, X_2, ..., X_n suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p.

Exemples.

1. L'exemple typique est celui de la variable aléatoire X qui compte le nombre de piles obtenus lors de la répétition de plusieurs piles ou face. Ainsi si on lance 10 fois la pièce et que celle-ci est parfaitement équilibrée alors $X \hookrightarrow \mathbb{B}\left(10; \frac{1}{2}\right)$.

Exercice 237. Dans un stock de ballons de foot contenant 70 % de ballons bicolores, on prélève 12 ballons au hasard, successivement et avec remise. X donne le nombre de ballons bicolores obtenus. Justifiez que X suit une loi binomiale.

Exercice 238. Dites si la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Si oui précisez-en les paramètres.

1. Dans un supermarché, 20 % des clients du samedi ont un caddie inférieur à 100 €. On choisit au hasard 15 clients un samedi. X donne le nombre de clients dont le caddie est inférieur à 100 €.

2. On lance cinq fois de suite une pièce bien équilibrée. X donne le rang du 1er pile obtenu (X prend la valeur 6 si on a pas obtenu de pile sur les 5 lancers).

VIII Coefficients binomiaux.

Proposition 77. Soient $p \in [0;1]$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in [\![0,n]\!]$. Étant donné un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, nous appellerons *coefficient binomial « k parmi n »* le nombre entier noté $\binom{n}{k}$ égale au nombre d'issues de l'expérience aléatoire comportant exactement k succès.

Démonstration. Les issues sont toutes équiprobables.

Une issue d'un schéma de Bernoulli est une n-liste formée de S et de $\overline{S}$ et donc $|\Omega| = 2^n$.

Déterminons le cardinal de l'événement $\{X = k\}$. Imaginons que les places de la n-liste sont numérotées de 1 à n. Choisir les emplacements des k succès revient alors à choisir k nombres distincts sans tenir compte de l'ordre parmi $[\![1,n]\!]$. On retrouve bien des combinaisons.

Exemples.

1. En considérant (l'arbre) une répétition de 3 pile-ou-face : $\binom{3}{0} = 1$, $\binom{3}{1} = 3$, $\binom{3}{2} = 3$ et $\binom{3}{2} = 1$.

Remarques.

1. Nous avons vu que le coefficient binomial dénombre le nombre de combinaisons ce qui correspond précisément à la situation obtenir k succès parmi les n répétitions. La définition du coefficient binomial a donc déjà été vue.

Rappelons que, pour $n \in \mathbb{N}$, nous appelons *factoriel n* le nombre entier, noté $n!$,égale à 1 si $n = 0$ et $n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ sinon.

Proposition 78. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0,n]\!]$. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Démonstration. Nous avons démontré cette formule dans la leçon sur le dénombrement.

Proposition 79. - Formule de Pascal. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![0,n-1]\!]$. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

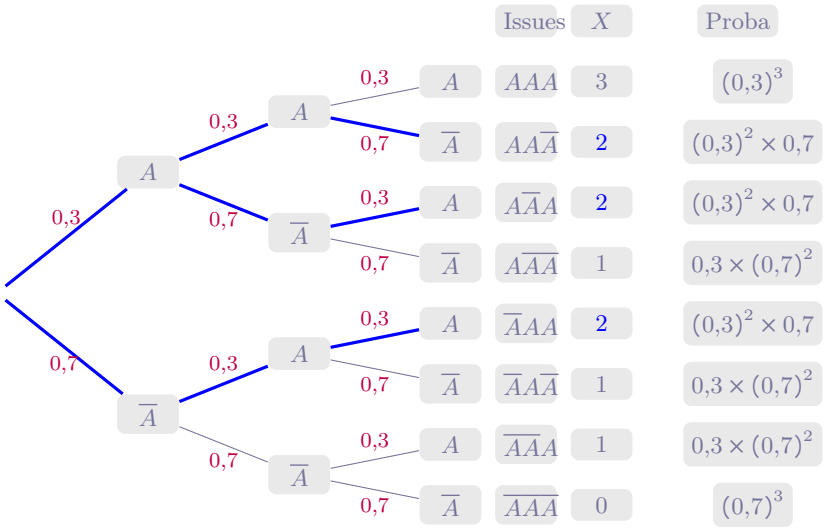
$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)![n-(k+1)]!} \\
&= \frac{n!\times(k+1)}{k!(n-k)!\times(k+1)} + \frac{n!\times(n-k)}{(k+1)![n-(k+1)]!\times(n-k)} \\
&= \frac{n! \times (k+1) + n! \times (n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{n! \times [(k+1) + (n-k)]}{(k+1)![(n+1)-(k+1)]!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

Remarques.

1. Ce résultat est appelé formule de Pascal.
2. Remarquons que les coefficients sont ceux intervenant dans les identités remarquables (degré 2 et 3).

IX Calcul de probabilité pour une loi binomiale.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}3$. La situation peut donc être représentée par l'arbre



Nous souhaitons calculer la probabilité d'obtenir 2 succès. Autrement dit nous cherchons $P(X = 2)$.

- La probabilité d'un chemin comportant 2 succès est $0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}3^2 \times 0{,}7$
- Il y a $\binom{3}{2} = 3$ chemins sur l'arbre comportant (exactement) 2 succès.

Nous en déduisons $P(X = 2) = 3 \times 0{,}3^2 \times 0{,}7 = 0{,}189$.

Proposition 80. Soient $n \in \mathbb{N}$, $k \in [\![0,n]\!]$, $p \in [0;1]$, $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$. $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Démonstration. La probabilité d'un chemin comportant exactement k succès parmi les n (et donc $n-k$ échecs) est $p^k \times (1-p)^{n-k}$.

Or il y a $\binom{n}{k}$ chemins comportant exactement deux succès donc la probabilité d'avoir k échecs (et peu importe dans quel ordre) parmi les n répétitions d'épreuves.

Remarques.

1. Ce résultat donne la loi de probabilité du nombre de succès d'un schéma de Bernoulli, de la loi binomiale. Autrement dit nous avons la loi binomiale.

Exercice 239. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}1$. Donnez, sous forme d'une fraction irréductible l'expression de $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}(X = 2)$, $\mathbb{P}(X = 3)$ et $\mathbb{P}(X = 4)$.

Exercice 240. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = \frac{3}{4}$.

1. Donnez, sous forme d'une fraction irréductible l'expression de $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X = 1)$ et $\mathbb{P}(X = 2)$.
2. Déduisez-en $\mathbb{P}(X \geqslant 3)$.

Exercice 241. Un pion est posé sur un axe gradué (axe des abscisses) à l'origine O. Une pièce équilibrée est lancée. Si elle tombe sur pile, le pion avance d'une unité, sinon il recule d'une unité. Une parti consiste à lancer la pièce trois fois de suite.

1. Représenter cette expérience aléatoire par un arbre pondéré.
2. Déterminez la probabilité des événements suivants.

   a) A : « le pion fini à l'abscisse 1 ».
   b) B : « le pion revient sur l'origine ».
   c) C : « le pion fini à l'abscisse -1 ».
   d) D : « le pion fini à l'abscisse 3 ».

X Calcul de probabilité avec la fonction de répartition avec la calculatrice.

Exercice 242. D'après l'INSEE, la proportion de Français de moins de 20 ans est restée stable à 24,6 % entre 2012 et 2014. On suppose que cette proportion se maintient pendant quelques années.

On interroge au hasard 12 Français et on note X la variable aléatoire donnant le nombre d'entre eux qui sont âgés de moins de 20 ans.

1. Justifiez que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculez les probabilités des événements suivants.

   (a) 10 personnes interrogées ont moins de 20 ans.
   (b) Au plus 8 personnes interrogées ont moins de 20 ans.
   (c) Au moins 4 personnes interrogées ont moins de 20 ans.

3. Quel est le nombre le plus probable de personnes ayant moins de 20 ans ?

Exercice 243. 18 % des Français âgés de plus de 15 ans ont fréquentés au moins une fois une bibliothèque en 2008. On suppose que cette proportion se maintient pendant les années qui suivent et on interroge au hasard 30 Français âgés de plus de 15 ans. On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'entre eux qui ont fréquenté une bibliothèque dans l'année.

1. Justifiez que X suit une loi binomiale, dont on précisera les paramètres.
2. Calculez la probabilité des événements suivants :

   a) $\mathbb{P}(X = 10)$, b) $\mathbb{P}(X \leqslant 5)$, c) $\mathbb{P}(X > 8)$.

   Traduisez chaque résultat par une phrase dans le contexte de l'exercice.
3. Quel est le nombre le plus probable de personnes ayant fréquenté une bibliothèque dans l'année ?

Exercice 244. Un fumeur est dit « fumeur régulier » s'il fume au moins une cigarette par jour. En 2010, en France, la proportion de fumeurs réguliers âgés de 15 à 19 ans, était de 23,6 %. On choisit au hasard, et de manière indépendante, quinze jeunes âgés de 15 à 19 ans. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de fumeurs réguliers parmi ces quinze jeunes.

1. Précisez la loi de probabilité de X.
2. Déterminez les probabilités des événements suivants, en arrondissant à 0,001 près.

   (a) Deux des jeunes interrogés sont des fumeurs réguliers.
   (b) Aucun des jeunes interrogés n'est un fumeur régulier.
   (c) Moins de cinq jeunes interrogés sont des fumeurs réguliers.
   (d) Plus d'un jeune interrogé est un fumeur régulier.

Exercice 245. Un fabricant vend des stylos par lot de 10. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de stylos défectueux dans un lot. On admet que X suit une loi binomiale de paramètres 10 et 0,034. On donnera les résultats à 10^{-3} près.

1. Quelle est la probabilité que le lot contienne au moins un stylo défectueux ?
2. Quelle est la probabilité que le lot contienne au moins deux stylos défectueux ?

Exercice 246. On considère que dans une classe de 24 élèves, chaque élève a 82 % de chance d'obtenir son bac.

1. On prend un élève au hasard. Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 0 si cet élève obtient son bac et 1 sinon. Quelle loi suit X ?
2. Soit Y la variable aléatoire représentant le nombre d'élèves ayant obtenu son bac dans cette classe de 24 élèves.
   (a) Quelle loi suit Y ?
   (b) Quelle est la probabilité que tous les élèves soient reçus ? On donnera un résultat approché à 10^{-3} près.

Exercice 247. On lance simultanément deux dés à six faces parfaitement équilibrés.

1. Quelle est la probabilité de faire un double 6 ?
2. On lance 10 fois de suite cette paire de dés. Quelle est la probabilité de faire au moins trois double 6 lors de ces 10 parties ? On donnera le résultat arrondi à 10^{-4} près.

Exercice 248. Un footballeur tire des penalties. Une étude statistique sur son taux de réussite montre qu'il marque le but avec une probabilité de 0,75. Ce footballeur tire une série de 10 penalties. On suppose que les différents tirs sont indépendants.

1. Son entraîneur lui affirme qu'il a à peu près autant de chance de réussir 5 penalties que de les réussir tous. A-t-il raison ?
2. L'entraîneur renchérit en disant à son joueur qu'il a plus d'une chance sur deux de réussir au moins 8 penalties. Qu'en est-il ?

XI Moments d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

Proposition 81. Soit $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

(i) $\mathbb{E}(Y) = np$.
(ii) $\mathbb{V}(Y) = np(1-p)$.
(iii) $\sigma(Y) = \sqrt{np(1-p)}$.

Démonstration. La démonstration repose sur des propriétés de l'espérance et de la variance que nous n'avons pas encore étudiées que nous admettrons.

(i) Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(1,p)$ et $(X_1,\ldots,X_n)$ un échantillon de taille n de la loi de X. Puisque $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Ainsi

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$$

Donc, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \cdots + \mathbb{E}(X_n)\\ &= n\mathbb{E}(X)\\ &= np\end{aligned}$$

(ii) Idem. La compatibilité de la variance avec la somme découlant de l'indépendance des variables aléatoires de l'échantillon.

Exercice 249. Une association organise une tombola et vend un très grand nombre de tickets à gratter. On suppose que deux tickets sur dix sont gagnants. Une personne achète au hasard vingt tickets. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de tickets gagnants.

1. Donnez la loi de probabilité de X.
2. Sans justification donnez la valeur de k telle que $\mathbb{P}(X = k)$ soit maximale. Interprétez ce résultat.
3. Calculez l'espérance de X. Interprétez.

Exercice 250. Un basketteur s'entraîne à tirer des lancers francs. On suppose que, quel que soit le résultat des tirs précédents, la probabilité qu'il réussisse est égale à 0,8. Il effectue une série de 30 tirs. On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où il réussit son tir.

1. Déterminez la loi de probabilité de X.
2. Calculez la probabilité que le basketteur
   (a) réussisse 18 tir exactement,
   (b) réussisse moins de 15 tirs,
   (c) réussisse au moins 20 tirs.
3. Déterminez le nombre moyen de tirs réussis.

Exercice 251. Une diode est fabriquée en série. À la sortie de la ligne de production, la probabilité qu'une diode prise au hasard soit défectueuse est égale à 0,017. Les diodes sont conditionnées par boîtes de 185 unités.

1. Quel nombre moyen de diodes défectueuses peut-on attendre par boîte ?
2. Une boîte est prise au hasard après conditionnement. Déterminez la probabilité qu'elle ne contienne aucune diode défectueuse.
3. Une boîte est dite « qualifiée » lorsqu'elle contient au plus quatre diodes défectueuses. Déterminez la probabilité que la boîte choisie soit qualifiée.
4. Un carton contient 10 boîtes. Quelle est la probabilité qu'un carton pris au hasard ne contienne que des boîtes qualifiées ?

Exercice 252. Un jeu sans mise de départ consiste à lancer dix fois de suites deux dés parfaitement équilibrés. À chaque double-six, on gagne 10 €. On note X la variable aléatoire égale au nombre de double-six obtenus sur les dix lancers des deux dés.

1. Justifiez que X suit une loi binomiale, dont on donnera les paramètres.
2. Calculez l'espérance de X.
3. Quelle somme peut-on espérer gagner en moyenne par jeu, si l'on joue un grand nombre de fois à ce jeu ?

Exercice 253. Un QCM comporte vingt questions. Pour chaque question trois réponses sont possibles mais une seule est correcte. Un élève décide de répondre au hasard à toutes les questions. On note X le nombre de bonnes réponses obtenues par l'élève.

1. Justifiez que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculez la probabilité que :
   (a) l'élève donne exactement 14 bonne réponses,
   (b) l'élève donne au moins dix bonnes réponses,
   (c) l'élève répond correctement à toutes les questions du QCM,
   (d) l'élève ne répond correctement à aucune question.
3. Calculez $\mathbb{E}(X)$ et donnez-en une interprétation.

XII Échantillonnage.

Exercice 254. Au cours d'une soirée, un restaurant accueille 45 convives. Pour un convive quelconque il est établi par le restaurateur que la probabilité qu'il prenne un café à la fin du repas est exactement de 0,8. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de cafés effectivement commandés à l'issue de la soirée. X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(45; 0{,}8)$.

1. (a) Afficher informatiquement les valeurs de k et les probabilités correspondantes $\mathscr{P}(X = k)$ pour $k \in [\![0; 45]\!]$.
   (b) Donnez les valeurs de k pour lesquelles $\mathbb{P}(X = k) \geqslant 0{,}1$.
2. Toujours à l'aide de la machine, affichez les probabilités cumulées croissantes $\mathbb{P}(X \leqslant k)$ pour $k \in [\![0; 45]\!]$.
3. (a) Déterminez le plus petit nombre entier a tel que $\mathbb{P}(X \leqslant a) \geqslant 0{,}9$. Interprétez ce résultat dans le contexte.
   (b) Déterminez le plus grand nombre entier b tel que $\mathbb{P}(X \leqslant b) \leqslant 0{,}1$.
   (c) Déterminez un ensemble $[\![c,d]\!]$ d'amplitude minimale tel que $\mathbb{P}(c \leqslant X \leqslant d) \geqslant 0{,}95$.

Exercice 255. Un site internet pose à tout usager une question de satisfaction à l'issue de sa visite ? La probabilité qu'un usager réponde « non » à cette question est 0,17. Un échantillon de 100 réponses prises au hasard a été constitué. On note X le nombre de réponses « non » contenues dans cet échantillon.

1. (a) Quelle est la loi suivie par la variable X ?
   (b) Avec la calculatrice, déterminez les valeurs de k pour lesquelles on a $\mathbb{P}(X = k) \geqslant 0{,}05$.
2. (a) À partir de quelle valeur de k a-t-on $\mathbb{P}(X \leqslant k) \geqslant 0{,}9$?
   Donnez une interprétation de ce résultat.
   (b) Déterminez un ensemble $[\![k,k']\!]$ d'amplitude minimale tel que $\mathbb{P}(k \leqslant X \leqslant k') \geqslant 0{,}5$.

Exercice 256. Le coyote est un animal sauvage proche du loup, qui vit en Amérique du Nord. Dans l'état d'Oklahoma, aux États-Unis, 70 % des coyotes sont touchés par une maladie appelée ehrlichiose. Il existe un test aidant à la détection de cette maladie. Lorsque ce test est appliqué à un coyote, son résultat est soit positif, soit négatif, et on sait que :

- Si le coyote est malade, le test est positif dans 97 % des cas.
- Si le coyote n'est pas malade, le test est négatif dans 95 % des cas.

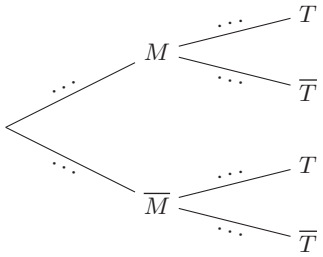
Partie A

Des vétérinaires capturent un coyote d'Oklahoma au hasard et lui font subir un test pour l'ehrlichiose. On considère les évènements suivants :

— M : « le coyote est malade » ;
— T : « le test du coyote est positif ».

On note $\overline{M}$ et $\overline{T}$ respectivement les évènements contraires de M et T.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation.



2. Déterminer la probabilité que le coyote soit malade et que son test soit positif.
3. Démontrer que la probabilité de T est égale à 0,694.
4. On appelle « valeur prédictive positive du test » la probabilité que le coyote soit effectivement malade sachant que son test est positif. Calculer la valeur prédictive positive du test. On arrondira le résultat au millième.
5. (a) Par analogie avec la question précédente, proposer une définition de la « valeur prédictive négative du test » et calculer cette valeur en arrondissant au millième.
   (b) Comparer les valeurs prédictives positive et négative du test, et interpréter.

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un coyote capturé au hasard présente un test positif est de 0,694.

1. Lorsqu'on capture au hasard cinq coyotes, on assimile ce choix à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard associe le nombre de coyotes dans cet échantillon ayant un test positif.
   (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier et préciser ses paramètres.
   (b) Calculer la probabilité que dans un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard, un seul ait un test positif. On arrondira le résultat au centième.
   (c) Un vétérinaire affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'au moins quatre coyotes sur cinq aient un test positif : cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.
2. Pour tester des médicaments, les vétérinaires ont besoin de disposer d'un coyote présentant un test positif. Combien doivent-ils capturer de coyotes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux présente un test positif soit supérieure à 0,99 ?

XIII Avec des variables aléatoires auxiliaires.

Comme nous l'avons vu il est possible de créer de nouvelles variables aléatoires en composant une fonction et une variable aléatoire.

Exercice 257. On joue à pile ou face cinq fois de suite. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de fois où on a obtenu face.

1. Quelle loi suit X ? Donnez ses paramètres.

Pour jouer à ce jeu, il faut payer 3 €. On gagne 1 € à chaque fois qu'on obtient face lors d'un des cinq lancers. On note Y la variable aléatoire représentant le gain (ou la perte) totale lors de ce jeu.

2. Exprimez Y en fonction de X.
3. Déduisez-en $\mathbb{E}(Y)$.
4. Ce jeu est-il financièrement intéressant ?
5. Quelle somme aurait-il fallu payer au départ pour que le jeu soit équitable ?

Exercice 258. Un tireur à l'arc atteint sa cible neuf fois sur dix. Ce tireur participe à un concours primé. Il tire 5 flèches sur la cible. Pour chaque flèche, s'il atteint la cible, il gagne 10 € , sinon il perd 20 €. On suppose que les tirs sont indépendants.

1. On appelle X le nombre de flèches ayant atteint la cible à l'issue des cinq tirs.
   (a) Montrer que X suit une loi binomiale dont précisera les paramètres.
   (b) Déterminez la probabilité d'atteindre au moins 2 fois la cible.
2. On appelle Y la variable aléatoire égale au gain du joueur à l'issue des cinq tirs.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par Y ?

(b) Déterminez la loi de Y.
(c) Quel est le gain moyen (positif ou négatif) du tireur s'il participe un grand nombre de fois à ce concours ? Est-ce intéressant pour lui ?

Exercice 259. Pour un avion à plusieurs réacteurs, on suppose que le risque de panne d'un des réacteurs est indépendant de l'état des autres réacteurs. Soit p la probabilité de panne d'un réacteur. On suppose que l'avion peut continuer à voler si au moins la moitié de ses réacteurs ne sont pas en panne.

1. On appelle X le nombre de réacteurs en panne sur un biréacteur. (Un biréacteur est un avion avec deux réacteurs.)
   (a) Quelles sont les valeurs possibles de X ?
   (b) Quelle est la loi de probabilité de X ?
   (c) Déterminez $P(X \leqslant 1)$ en fonction de p.
2. On appelle Y le nombre de réacteurs en panne sur un quadriréacteur.
   (a) Quelles sont les valeurs possibles de Y ?
   (b) Quelle est la loi de probabilité de Y ?
   (c) Déterminez $P(Y \leqslant 2)$ en fonction de p.
3. Comparez la sécurité offerte par un biréacteur à celle offerte par un quadriréacteur suivant les valeurs de p.

Exercice 260. Lors d'un concours d'équitation, un cavalier effectue un parcours de 1 500 m à la vitesse de 10 km/h et franchit sur ce parcours six obstacles indépendamment.

Pour ce cavalier, la probabilité de franchir l'obstacle sans faute est de $\frac{2}{3}$. Le passage d'un obstacle ne ralentit pas le cavalier, tandis qu'un passage avec faute lui fait perdre une minute.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'obstacles franchis sans faute.

1. Quelle est la loi de probabilité de X.
2. Calculez l'espérance de X.
3. On appelle Y la variable aléatoire égale à la durée du parcours. Exprimez Y en fonction de X et donnez son espérance. Interprétez le résultat.

Exercice 261. **Partie A.**

Julien doit prendre l'avion ; il a prévu de prendre le bus pour se rendre à l'aéroport.

S'il prend le bus de 8 h, il est sûr d'être à l'aéroport à temps pour son vol.

Par contre, le bus suivant ne lui permettrait pas d'arriver à temps à l'aéroport.

Julien est parti en retard de son appartement et la probabilité qu'il manque son bus est de 0,8.

S'il manque son bus, il se rend à l'aéroport en prenant une compagnie de voitures privées ; il a alors une probabilité de 0,5 d'être à l'heure à l'aéroport.

On notera :

- B l'évènement : « Julien réussit à prendre son bus » ;
- V l'évènement : « Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol ».

1. Donner la valeur de $P_B(V)$.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
3. Montrer que $P(V) = 0{,}6$.
4. Si Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol, quelle est la probabilité qu'il soit arrivé à l'aéroport en bus ? Justifier.

Partie B.

Les compagnies aériennes vendent plus de billets qu'il n'y a de places dans les avions car certains passagers ne se présentent pas à l'embarquement du vol sur lequel ils ont réservé. On appelle cette pratique le surbooking.

Au vu des statistiques des vols précédents, la compagnie aérienne estime que chaque passager a 5 % de chance de ne pas se présenter à l'embarquement.

Considérons un vol dans un avion de 200 places pour lequel 206 billets ont été vendus. On suppose que la présence à l'embarquement de chaque passager est indépendante des autres passagers et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de passagers se présentant à l'embarquement.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. En moyenne, combien de passagers vont-ils se présenter à l'embarquement ?
3. Calculer la probabilité que 201 passagers se présentent à l'embarquement. Le résultat sera arrondi à 10^{-3} près.
4. Calculer $P(X \leqslant 200)$, le résultat sera arrondi à 10^{-3} près. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
5. La compagnie aérienne vend chaque billet à 250 euros.
   Si plus de 200 passagers se présentent à l'embarquement, la compagnie doit rembourser le billet d'avion et payer une pénalité de 600 euros à chaque passager lésé.
   On appelle :
   - Y la variable aléatoire égale au nombre de passagers qui ne peuvent pas embarquer bien qu'ayant acheté un billet ;
   - C la variable aléatoire qui totalise le chiffre d'affaire de la compagnie aérienne sur ce vol.

   On admet que Y suit la loi de probabilité donnée par le tableau suivant :

y_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y_i)$	0,947 75	0,030 63	0,014 41	0,005 39	0,001 51	0,000 28	

   (a) Compléter la loi de probabilité donnée ci-dessus en calculant $P(Y = 6)$.
   (b) Justifier que : $C = 51\,500 - 850Y$.
   (c) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire C sous forme d'un tableau. Calculer l'espérance de la variable aléatoire C à l'euro près.
   (d) Comparer le chiffre d'affaires obtenu en vendant exactement 200 billets et le chiffre d'affaires moyen obtenu en pratiquant le surbooking.

Exercice 262. *La partie* C *est indépendante des parties* A *et* B.

Un robot est positionné sur un axe horizontal et se déplace plusieurs fois d'un mètre sur cet axe, aléatoirement vers la droite ou vers la gauche. Lors du premier déplacement, la probabilité que le robot se déplace à droite est égale à $\frac{1}{3}$. S'il se déplace à droite, la probabilité que le robot se déplace de nouveau à droite lors du déplacement suivant est égale à $\frac{3}{4}$. S'il se déplace à gauche, la probabilité que le robot se déplace de nouveau à gauche lors du déplacement suivant est égale à $\frac{1}{2}$. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note :

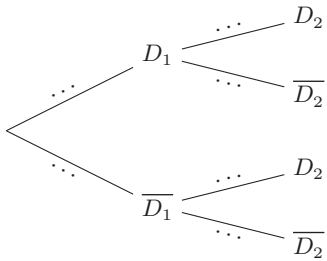
- D_n l'évènement : « le robot se déplace à droite lors du n-ième déplacement » ;
- $\overline{D_n}$ l'évènement contraire de D_n ;
- p_n la probabilité de l'évènement D_n.

On a donc $p_1 = \frac{1}{3}$.

Partie A : étude du cas particulier où $n = 2$.

Dans cette partie, le robot réalise deux déplacements successifs.

1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Déterminer la probabilité que le robot se déplace deux fois à droite.
3. Montrer que $p_2 = \dfrac{7}{12}$.
4. Le robot s'est déplacé à gauche lors du deuxième déplacement. Quelle est la probabilité qu'il se soit déplacé à droite lors du premier déplacement ?

Partie B : étude de la suite (p_n).

On souhaite estimer le déplacement du robot au bout d'un nombre important d'étapes.

1. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $p_{n+1} = \dfrac{1}{4}p_n + \dfrac{1}{2}$. On pourra s'aider d'un arbre.
2. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $p_n \leqslant p_{n+1} < \dfrac{2}{3}$.
   (b) La suite (p_n) est-elle convergente ? Justifier.
3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par $u_n = p_n - \dfrac{2}{3}$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est géométrique et préciser son premier terme et sa raison.
   (b) Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Dans cette partie, on considère un autre robot qui réalise dix déplacements d'un mètre indépendants les uns des autres, chaque déplacement vers la droite ayant une probabilité fixe égale à $\dfrac{3}{4}$. Quelle est la probabilité qu'il revienne à son point de départ au bout des dix déplacements ? On arrondira le résultat à 10^{-3} près.

XIV Exercices.

Exercice 263. Un restaurateur constate qu'au déjeuner, 9 clients sur 10 prennent un café. Quatre clients se présentent pour déjeuner et commandent de façon indépendante. Pour chacun on note C l'événement « le client prend un café ».

1. Justifiez que cette expérience est un schéma de Bernoulli dont vous préciserez les paramètres.
2. Représentez la situation par un arbre pondéré.
3. Calculez la probabilité des événements suivants.
   (a) Un seul des quatre clients prend un café.
   (b) Au moins deux clients prennent un café.
   (c) Au plus deux clients prennent un café.

Exercice 264. Un carton de jouet contient un nombre très important de petites briques de couleur rouge ou bleue. On estime que la proportion de briques bleues est 40 %. On prend quatre briques au hasard dans le carton.

1. Justifiez que l'expérience est un schéma de Bernoulli.
2. Schématisez la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
3. Calculez la probabilité des événements suivants.
   (a) On a prélevé 4 briques bleues.
   (b) On à prélevé 2 briques bleues, puis 2 rouges.
   (c) On a prélevé au moins une brique bleue ?
   (d) On a prélevé au plus une brique rouge.

Exercice 265. David a du mal a entendre son réveil le matin. Ses parents estiment que, 6 fois sur 10, il se rendort et arrive en retard au lycée. On suppose que les réveils de David sont indépendants d'un matin à l'autre et on étudie son comportement sur une semaine de 5 jours (du lundi au vendredi).

1. En notant pour chaque matin R l'événement « David se rendort et est en retard au lycée », représentez la situation par un arbre pondéré.
2. Calculez la probabilité des événements suivants.
   (a) David n'est pas en retard de la semaine.
   (b) David est en retard au lycée le lundi et le mardi matins.
   (c) David est en retard au plus trois fois.
   (d) David est en retard deux matins consécutifs.

XV Exercices avec variation de la taille de l'échantillon.

— Bac 2021 Amérique du Nord mai 2021.

XVI Corrections.

Exercice 231.

1. • Épreuve : prélever une pièce.
   • Succès S :« la pièce est défectueuse ».
   • Probabilité du succès : $p = \frac{1}{100} = 0{,}01$.
   Il s'agit bien d'une épreuve de Bernoulli.
2. • Épreuve : interroger une personne au hasard.
   • Il y a plus de deux issues et donc pas de succès.
   Il ne s'agit pas d'une épreuve de Bernoulli.

Exercice 232.

1. $X \hookrightarrow \mathscr{B}(0{,}94)$ car X compte le nombre de succès d'une expérience avec deux issues dont le succès a une probabilité de 0,94 ?
2. $X \hookrightarrow \mathscr{B}(0{,}96)$ donc $\mathbb{E}(X) = p = 094$, $\mathbb{V}(X) = p(1-p) = 0{,}94 \times 0{,}06 = 0{,}0564$ et $\sigma(X) = \sqrt{0{,}0564}$.

Exercice 233.

1. Il ne s'agit pas d'un schéma de Bernoulli car le tirage étant sans remise les différents tirages ne sont pas indépendants les uns des autres.
2. Démontrons qu'il s'agit d'un schéma de Bernoulli.
   * Épreuve de Bernoulli
     — Épreuve : choisir une lettre au hasard.
     — Succès : « La lettre est une voyelle. »
     — $p = \frac{6}{26}$.
   * Schéma de Bernoulli.
     Le choix de la lettre étant répété $n = 50$ fois à l'identique et de façon indépendante nous pouvons affirmer que
     $\boxed{\text{ces choix constituent un schéma de Bernoulli de paramètres } n = 50 \text{ et } p = \frac{6}{26}.}$

Exercice 234. Épreuve : succès « défectueuse » de probabilité 0,08. On recommence 25 fois l'épreuve de façon identique et indépendante donc schéma de Bernoulli de paramètres 25 et 0,08.

Exercice 235.

1. $n = 2$ et $p = 0{,}01$.
2.
3. (a) $0{,}99 \times 0{,}99 = 0{,}9801$.
   (b) $0{,}001 \times 0{,}99 + 0{,}99 \times 0{,}01 = 0{,}0198$.
   (c) $0{,}01 \times 0{,}01 = 0{,}0001$.

Exercice 236.

1. Épreuve : succès « un feu vert » de probabilité $\frac{1}{3}$/ Répétition à l'identique et de façon indépendante donc schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{3}$.
2.
3. (a) $3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9}$.
   (b) $3 \times \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.
   (c) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$.
   (d) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$.

Exercice 237. Démontrons que X suit une loi binomiale.

* Épreuve de Bernoulli
  — Épreuve : prélever un ballon
  — Succès : « Le ballon est bicolore. »
  — $p = \frac{70}{100}$.
* Schéma de Bernoulli.
  Le choix du ballon étant répété $n = 12$ fois à l'identique et de façon indépendante (avec remise) nous pouvons affirmer qu'il s'agit d'un schéma de Bernoulli.
* Variable aléatoire.
  La variable aléatoire X compte le nombre de ballons bicolores obtenus donc le nombre de succès de notre schéma de Bernoulli.
* Conclusion.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = \frac{70}{100}$

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(12; \frac{70}{100}\right)$$

Exercice 238.

1. $X \hookrightarrow \mathscr{B}(15; 0{,}2)$ si le nombre de clients est suffisant pour indépendance.
2. Pas binomiale car pas compteur du nombre de succès.

Exercice 239. $\mathbb{P}(X = 0) = \binom{4}{0}0{,}1^0 \times 0{,}9^4 = 0{,}9^4$, $\mathbb{P}(X = 1) = \binom{4}{1}0{,}1 \times 0{,}9^3 = 4 \times 0{,}1 \times 0{,}9^3$, $\mathbb{P}(X = 2) = \binom{4}{2}0{,}1^2 \times 0{,}9^2 = 4 \times 3 \times 0{,}01 \times 0{,}9^2 = 0{,}12 \times 0{,}9^2$, $\mathbb{P}(X = 3) = \binom{4}{3}0{,}1^3 \times 0{,}9 = 3{,}6 \times 0{,}1^3$ et $\mathbb{P}(X = 4) = \binom{4}{4}0{,}1^4 \times 0{,}9^0 = 0{,}0001$.

Exercice 240.

1. $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{4096}$, $\frac{9}{2048}$ $\frac{135}{4096}$.
2. $\frac{1971}{2048} \approx 0{,}9624$

Exercice 241.

1.
2. Soit X le nombre de déplacements vers a droite parmi les trois. $X \hookrightarrow \mathscr{B}(3; 0{,}5)$. $Y = X - (3 - X)$ est le déplacement algébrique.

   a) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \binom{3}{2}0{,}5^2 \times 0{,}5 = \frac{3}{8}$
   b) $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}\left(X = \frac{3}{2}\right) = 0$.
   c) $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(Y = -1) = \mathbb{P}(X = 1) = \binom{3}{1} \times 0{,}5^1 \times 0{,}5^2 = \frac{3}{8}$.
   d) $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(Y = 3) = \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{8}$.

Exercice 242.

1. Épreuve : succès « âgé de moins de 20 ans » de probabilité 0,246. 12 répétitions identiques et indépendantes donc schéma de Bernoulli. X compte le nombre de succès donc : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(12; 0{,}246)$.
2. (a) $\mathbb{P}(X = 10) \approx 3{,}0 \times 10^{-5}$.
   (b) $\mathbb{P}(X \leqslant 8) \approx 0{,}9996565531143079$.
   (c) $\mathbb{P}(X \geqslant 4) \approx 0{,}33886744663769663$.
3. On compare tous les $\mathbb{P}(X = k)$ pour $k \in [\![0,12]\!]$. Et on voit que la probabilité maximale est obtenue pour $k = 3$.

Exercice 243.

1. $X \hookrightarrow \mathscr{B}(30; 0{,}18)$.
2. (a) $P(X = 10) \approx 0{,}0203$. La probabilité que 10 personnes parmi les 30 interrogées aient fréquenté une bibliothèque dans l'année est de 0,0203.
   (b) $P(X \leq 5) \approx 0{,}5395$. La probabilité qu'au plus 5 personnes parmi les 30 interrogées aient fréquenté une bibliothèque dans l'année est de 0,5395.
   (c) $P(X > 8) = 1 - P(X \leq 7) \approx 0{,}1582$. La probabilité qu'au moins 7 personnes parmi les 30 interrogées aient fréquenté une bibliothèque dans l'année est de 0,1582.
3. Le résultat s'obtient avec le tableau de valeur de la calculatrice. Le nombre le plus probable est de 5 personnes parmi les 30.

Exercice 244. Un fumeur est dit « fumeur régulier » s'il fume au moins une cigarette par jour. En 2010, en France, la proportion de fumeurs réguliers âgés de 15 à 19 ans, était de 23,6 %. On choisit au hasard, et de manière indépendante, quinze jeunes âgés de 15 à 19 ans. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de fumeurs réguliers parmi ces quinze jeunes.

1. $X \hookrightarrow \mathscr{B}(15; 0{,}236)$.
2. (a) $\mathbb{P}(X = 2) \approx 0{,}17669610103346298$.
   (b) $\mathbb{P}(X = 0) \approx 0{,}01763601171475565$.
   (c) $\mathbb{P}(X \leqslant 4) \approx 0{,}731751997198684$
   (d) $\mathbb{P}(X \geqslant 2) \approx 0{,}9006473895022142$.

Exercice 245.

1. $\mathbb{P}(X \geqslant 1) \approx 0{,}2924269809809673$
2. $\mathbb{P}(X \geqslant 2) \approx 0{,}043384717558119346$.

Exercice 246.

1. $X \hookrightarrow \mathscr{B}(24; 0{,}18)$.
2. (a) $Y = 24 - X$. $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(24; 0{,}82)$.
   (b) $\mathbb{P}(Y = 24) \approx 0{,}008541466801005388$.

Exercice 247.

1. $\frac{1}{36}$.
2. $X \hookrightarrow \mathscr{B}(10; 1/3)$. $\mathbb{P}(X \geqslant 3) \approx 0{,}7008586089518871$.

Exercice 248.

1. $X \hookrightarrow \mathscr{B}(10; 0{,}75)$. $\mathbb{P}(X = 5) \approx 0{,}058399200439453125$ et $\mathbb{P}(X = 10) \approx 0{,}056313514709472656$.
2. $\mathbb{P}(X \geqslant 8) \approx 0{,}5255928039550781$.

Exercice 249.

1. $X \hookrightarrow \mathscr{B}(20; 0{,}2)$.
2. Avec la calculatrice on calcule toutes les images par la fonction de probabilité. Le nombre de gagnant parmi les 20 le plus probable est $k = 4$.
3. $X \hookrightarrow \mathscr{B}(20; 0{,}2)$ donc $\mathbb{E}(X) = np = 20 \times 0{,}2 = 4$. En moyenne, en recommençant un grand nombre de fois le choix de 20 personnes, 4 personnes parmi les 20 sont gagnantes.

Exercice 250.

1. $X \hookrightarrow \mathscr{B}(30; 0{,}8)$.
2. (a) $\mathbb{P}(X = 18) \approx 0{,}006382073542739097$.
   (b) $\mathbb{P}(X \leqslant 14) \approx 5{,}238728711843937 \times 10^{-05}$ ou $\mathbb{P}(X \leqslant 15) \approx 0{,}00023122561166772162$.
   (c) $\mathbb{P}(X \geqslant 20) \approx 0{,}9743837446646735$.

3. $\mathbb{E}(X) = np = 30 \times 0{,}8 = 24$.

Exercice 251.

1. $X \hookrightarrow \mathscr{B}(185; 0{,}017)$. $\mathbb{E}(X) = np = 185 \times 0{,}017 = 3{,}145$.
2. $\mathbb{P}(X = 0) = 0{,}017^{185}$.
3. $\mathbb{P}(X \leqslant 4) \approx 0{,}7916356917632624$.
4. Si le nombres e trucs défaillants est indépendant d'une boîte à l'autre : $\mathbb{P}\left(\{X_1 \leqslant 4\} \cap \{X_2 \leqslant 4\} \cap \cdots \cap \right.$ $\mathbb{P}(X_1 \leqslant 4)\mathbb{P}(X_2 \leqslant 4)\acute{s}\mathbb{P}(X_{10} \leqslant 4) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant 4)^{10} \approx 0{,}09666153025183684$.

Exercice 252.

1. X compte le nombre de succès d'une répétition à l'identique et de façon indépendante d'une épreuve de Bernoulli. $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(10; \frac{1}{36}\right)$.
2. $\mathbb{E}(X) = 10 \times \frac{1}{36} = 3{,}6$.
3. Par linéarité $\mathbb{E}(10X) = 10\mathbb{E}(X) = 36$.

Exercice 253.

1. $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(20; \frac{1}{3}\right)$.
2. (a) $\mathbb{P}(X = 14) \approx 0{,}0007114406039239361$.
   (b) $\mathbb{P}(X \geqslant 10) \approx 0{,}09189577448726138$.
   (c) $\mathbb{P}(X = 0) \approx 0{,}00030072865982171815$.
3. $\mathbb{E}(X) = 20 \times \frac{1}{3}$ il donnera, en moyenne, 6,7 bonnes réponses à un test.

Exercice 254.

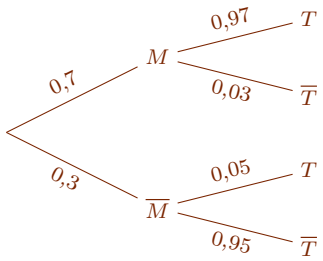
1. (a)
   (b) $[\![34{,}38]\!]$
2.
3. (a) $a = 39$.
   (b) $b = 32$.
   (c) $c = 30$ et $d = 40$.

Exercice 255.

1. (a) $X \hookrightarrow \mathscr{B}(100; 0{,}017)$.
   (b) $k \in [\![13{,}21]\!]$.
2. (a) $k = 22$. Il y a 9 % de chance d'avoir moins de 22 réponse non dans le questionnaire.
   (b) $k = 16$ et $k' = 17$.

Exercice 256. **Partie A**

1.



2. $\mathbb{P}(M \cap T) = 0{,}7 \times 0{,}97 = 0{,}679$
3. $\mathbb{P}(T) = 0{,}679 + 0{,}3 \times 0{,}05 = 0{,}694$.
4. $\mathbb{P}_T(M) = \frac{0{,}679}{0{,}694} \approx 0{,}9783861671469742$
5. (a) $\mathbb{P}_{\overline{T}}(\overline{M}) = \frac{0{,}3 \times 0{,}95}{1 - 0{,}694} \approx 0{,}9313725490196076$.
   (b) Un résultat positif est donc plus ûr qu'un résultat négatif.

Partie B

1. (a) $X \hookrightarrow \mathscr{B}(5; 0{,}694)$. Compteur du nombre de succès dans un schéma de Bernoulli c'est-à-dire la répétition à l'identique et de façon indépendante d'une épreuve de Bernoulli dont le succès est « coyote malade ».

(b) $\mathbb{P}(X=1)=\binom{5}{1}0{,}694^1\times(1-0{,}694)^4\approx 0{,}03042392072112002$.
(c) $\mathbb{P}(X\geqslant 4)\approx 0{,}5159084779671039>0{,}5$.

2. $X_n\hookrightarrow\mathscr{B}(n;0{,}694)$. $\mathbb{P}(X_n\geqslant 1)>0{,}99\Leftrightarrow 1-\mathbb{P}(X=0)>0{,}99\leftrightarrow 0{,}01>\binom{n}{0}0{,}694^0\times(1-0{,}694)^n\Leftrightarrow 0{,}01>0{,}306^n$.
Programme Python ou logarithme.

```python
def seuil():
n=0
while 0.306**n>=0.01:
n=n+1
return n
```

À partir de $n=4$.

Exercice 257.

1. Quelle loi suit $X\hookrightarrow\mathscr{B}(5;0{,}5)$.
2. $Y=-3+X$.
3. $\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}(-3+X)=-3+\mathbb{E}(X)=-3+np=-3+5\times 0{,}5=-0{,}5$.
4. Le jeu est défavorable au joueur car $\mathbb{E}(X)<0$.
5. $-s+0{,}5\times 0{,}5>0\Leftrightarrow s<2{,}5$.

Exercice 258.

1. (a) X compte le nombre de succès d'une répétition à l'identique et de façon indépendante d'une épreuve de Bernoulli $X\hookrightarrow\mathscr{B}(5;0{,}9)$.
   (b) $\mathbb{P}(X\geqslant 2)=0{,}99954$.
2. (a) $Y=10X-20(5-X)$ et $Y\in\{50;20;-10;-50;-70;-100\}$.
   (b) Même probabilités que cette de X.
   (c) $\mathbb{E}(Y)=10\mathbb{E}(X)-20(5-\mathbb{E}(X))=10\times 4{,}5-20(5-4{,}5)=35$. Le jeu est donc favorable au joueur.

Exercice 259.

1. (a) $X\in\{0;1;2\}$?
   (b) $X\hookrightarrow\mathscr{B}(2,p)$.
   (c) $P(X\leqslant 1)=1-\mathbb{P}(X=2)=1-\binom{2}{2}\times p^2\times(1-p)^0=1-p^2$.
2. (a) $Y\in[\![0,4]\!]$.
   (b) $Y\hookrightarrow\mathscr{B}(4,p)$.
   (c) $P(Y\leqslant 2)=1-p^4-4p^3(1-p)$.
3. $\mathbb{P}(Y\leqslant 2)-\mathbb{P}(X\leqslant 1)=p^2-p^4-4p^3(1-p)=p^2(1-p^2-4p(1-p))=p^2(3p^2-4p+1)=p^2 3(p-1)\left(p-\frac{1}{3}\right)$. Si $p\in\left[0;\frac{1}{3}\right]$ alors le quadrimoteur est plus fiable.

Exercice 260.

1. $X\hookrightarrow\mathscr{B}\left(6,\frac{2}{3}\right)$.
2. $\mathbb{E}(X)=6\times\frac{2}{3}=4$.
3. $Y=\frac{1{,}5}{10}\times 60+(6-X)$. $\mathbb{E}(Y)=15-4=11$.

Exercice 261. **Partie A.**

1. 1.
2.
3. $\frac{1}{3}$.

Partie B.

1. $X\hookrightarrow\mathscr{B}(206;0{,}95)$.
2. $\mathbb{E}(X)=206\times 0{,}95=195{,}7$.
3. $\mathbb{P}(X=201)\approx 0{,}031$.
4. $\mathbb{P}(X\leqslant 200)\approx 0{,}948$. La probabilité qu'il n'y ait pas de problème de surréservation est de 0,948.
5. (a) $\mathbb{P}(Y=6)=6\times 10^{-5}$.

(b) $206 \times 250 = 51500$. Pour chaque sur-réservation la compagnie paye $250 + 600 = 850$ euros. D'où $Y = 51500 - 850Y$.

(c)

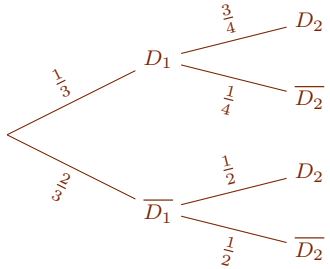
c_i	51 500	50 650	49 800	48 950	48 100	47 250	46 400
$P(C = c_i)$	0,947 75	0,030 63	0,014 41	0,005 39	0,001 51	0,000 28	0,000 006

(d) $\mathbb{E}(Y) \approx 51424{,}97$.

(e) $200 \times 250 = 50000$.

Exercice 262. **Partie A : étude du cas particulier où $n = 2$.**

1.



2. $\mathbb{P}(D_1 \cap D_2) = \frac{1}{4}$.
3. $p_2 = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{12}$.
4. $\mathbb{P}_{D_2}(D_1) = \frac{3}{7}$

Partie B : étude de la suite (p_n).

1. Formule des probabilité totales : $p_{n+1} = p_n \times \frac{3}{4} + (1 - p_n) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$.
2. (a) $p_1 = \frac{1}{3}$ et $p_2 = \frac{7}{12}$ donc $p_1 \leqslant p_2 < \frac{2}{3}$. Si $p_n \leqslant p_{n+1} < \frac{2}{3}$ alors, la fonction affine $x \mapsto \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ étant strictement croissante, $\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{4}p_{n+1} + \frac{1}{2} < \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$.

   (b) On a :

   (i) $\forall n \geqslant 1$, $p_n \leqslant p_{n+1}$ donc (p_n) est croissante,

   (ii) $\forall n \geqslant 1$, $p_n < \frac{2}{3}$,

   donc, d'après le théorème de la limite monotone, (p_n) converge vers un réel ℓ tel que $\ell \leqslant \frac{2}{3}$.
3. (a) $u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{3} = \left(\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}p_n - \frac{1}{6} = \frac{1}{4}\left(u_n + \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{6} = \frac{1}{4}u_n$.
   On a : $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \frac{1}{4}p_n$ donc (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
   De plus $u_1 = p_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$.

   (b) D'après la question précédente : $p_n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}$. Puisque $\frac{1}{4} \in]-1; 1[$, (p_n) converge vers $\frac{2}{3}$.

Partie C

$X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(10; \frac{3}{4}\right)$. $\mathbb{P}(X = 10) = \frac{1}{4^{10}}$.

Exercice 263.

1. Répétition à l'identique et de façon indépendante d'une expérience de Bernoulli. Paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}9$.
2. 2 branches à chaque embranchement et 4 niveaux.
3. (a) $\mathbb{P}(X = 1) = \binom{4}{1} 0{,}9^1 \times 0{,}1^3 = 0{,}0036$.

   (b) $\mathbb{P}(X \geqslant 2) \approx 0{,}9963$.

   (c) $\mathbb{P}(X \leqslant 2) \approx 0.0523$.

Exercice 264.

1. Répétition à l'identique et de façon indépendante d'une épreuve de Bernoulli.
2.
3. (a) Notons X la variable aléatoire comptant le nombre de briques bleues. $X \hookrightarrow \mathscr{B}(4; 0{,}4)$. $\mathbb{P}(X = 4) = \binom{4}{4} 0{,}4^4 \times (1 - 0{,}4)^0 = 0{,}0256$.

(b) $\mathbb{P}(BBRR) = 0{,}4^2 \times 0{,}6^2$ du fait de l'indépendance.
(c) $\mathbb{P}(X \geqslant 1) = 0{,}8704$.
(d) $\mathbb{P}(X \geqslant 3) = 0{,}1792$.

Exercice 265.

1.
2. (a) Notons X le compteur du nombre de retards. $X \hookrightarrow \mathscr{B}(5; 0{,}6)$. $\mathbb{P}(X = 0) = 0{,}4^4 = 0{,}0256$.
(b) $\mathbb{P}(RR\overline{RR}) = 0{,}6^2 \times 0{,}4^3 = 0{,}02304$.
(c) $\mathbb{P}(X \geqslant 3) = 0{,}68256$.
(d) Il y a 4 chemins possibles et la probabilité de l'un est $0{,}6^2 \times 0{,}4^3$ donc la probabilité est $4 \times 0{,}6^2 \times 0{,}4^3 = 0{,}09216$.

12. Variables aléatoires et moments.

Nous nous limiterons à des univers finis ce qui permet de ne pas se préoccuper de la mesurabilité des variables aléatoires.

I Notion de variable aléatoire finie.

Définition 41. Nous appellerons *variable aléatoire* sur un ensemble fini Ω, toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Remarques.

1. La définition de variable aléatoire ne nécessite pas de situation aléatoire cependant l'ensemble de définition Ω sera bien sûr l'univers d'une expérience aléatoire.
2. $X(\Omega)$, l'ensemble des images d'éléments de Ω par X, est appelée le *support de la variable aléatoire* ou son univers-image.
3. Puisque Ω est fini $X(\Omega)$ l'est aussi.
4. X, la variable aléatoire, va transporter la structure d'espace vectoriel de Ω sur $X(\Omega)$. C'est une démarche qui deviendra systématique en probabilité : nous regrouperons de nombreuses situations (expériences probabilistes) grâce à une variable aléatoire qui donne le même univers-image.

Exemples.

1. Pour un lancer de pièce dont les issues sont P et F, en associant à pile le nombre -1 et à face 1 on définie une variable aléatoire. $X(\Omega) =$.
2. $X : \{P,F\} \to \mathbb{R}$ définie par $X(P) = 12$ n'est pas une variable aléatoire car ce n'est pas une application : elle n'est pas définie en F.
3. En associant à un lancer de deux dés la somme des nombres obtenus on définie une variable aléatoire Y. $Y(\Omega) =$.
4. On lance un dé tétraédrique. Si le résultat est 1 ou 2 on gagne 1 €, si on obtient 3 on perd 3 € et sin on obtient 4 on perd 4 €. Nous venons de définir une variable aléatoire Z associée à cette expérience aléatoire.
5. Il est possible de définir des variables aléatoires sur des univers non finis : à une répétition de pile ou face on associe le nombre qui est le rang du premier pile obtenu.

Exercice 266. Déterminez le support de la variable aléatoire dans les cas suivants.

a) Une loterie est organisée. Cent tickets numérotés de 1 à 100 sont vendus. Les tickets 1 à 5 permettent de gagner le premier lot d'une valeur de 80 €. Les ticket 6 à 15 permettent de gagner un second lot d'une valeur de 30 €. Soient X la variable aléatoire qui à un ticket associe son numéro et Y la variable aléatoire qui à un ticket associe la valeur du lot gagné.

b) Une puce se déplace sur une droite graduée en partant de l'origine et en faisant des bonds aléatoires de longueur 1 vers la gauche ou vers la droite. On note X_1 la variable aléatoire qui indique la position de la puce sur l'axe gradué au bout d'un bond. Plus généralement on note X_i la variable aléatoire indiquant la position de la puce au terme de $i \in \mathbb{N}^*$ bonds.

Proposition 82. Soient Ω un ensemble fini, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une application. Les $\{X = a\}$ pour $a \in X(\Omega)$ (ou $a \in \mathbb{R}$) forment un système complet d'événements.

Démonstration. C'est une propriété des applications : les ensembles d'antécédents $X^{-1}(\{a\})$ sont disjoints deux à deux par unicité de l'image (démonstration par l'absurde).

Remarques.

1. On appelle *loi de probabilité de la variable aléatoire* finie X la distribution de probabilité $(x, \mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.

Exemples.

1. Si $X(\Omega) = a$, avec $a \in \mathbb{R}$ alors on dit que X est une variable aléatoire *certaine*.
2. Si $X(\Omega) = \{0; 1\}$ et $p = \mathbb{P}(X = 1)$ alors on dit que X suit une *loi de Bernoulli de paramètre* p et on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que X suit une *loi uniforme sur* $[\![1,n]\!]$ si $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$ et si : $\forall a \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(X = a) = \frac{1}{n}$.
4. Soient a et b des entiers avec $a < b$. On dit que X suit une *loi uniforme sur* $[\![a,b]\!]$ si $X(\Omega) = [\![a,b]\!]$ et : $\forall k \in [\![a,b]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{b-a+1}$.

Proposition 83. Soient $n \in \mathbb{N}$, Ω un ensemble (fini), $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. $\mathbb{P}(X = a) = \sum_{\eta \in \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\}} \mathbb{P}(\eta)$.

Démonstration. Découle de la définition de la probabilité d'un événement sur un univers fini vue en seconde : la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le réalisent.

Exemples.

1. Soit Y la variable aléatoire qui a un lancé de deux dés parfaitement équilibrés associe la somme des nombres obtenus. $\mathbb{P}(Y = 6) = \sum_{\{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) = 6\}} \mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}((1,5)) + ((5,1)) + ((2,4)) + ((4,2)) + ((3,3)) = \frac{5}{36}$.

Remarques.

1. Ce résultat rappelle que pour calculer la probabilité d'un événement présenté sous la forme $\{X = a\}$ il faut revenir à l'univers Ω sur lequel il y a effectivement une probabilité définie.

Proposition 84. Soit $A \subset \mathbb{R}$. $\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{a \in A} \mathbb{P}(X = a)$.

Démonstration. Conséquence du fait que les $\{X = a\}$ constituent un système complet d'événements : $\{X \in A\} = \bigcup_{a \in A} \{X = a\}$.

Exemples.

1. Si Y est la sommes des nombres apparus sur les faces de deux dés équilibrés alors $\mathbb{P}(Y \leqslant 3) = \sum_{k=2}^{3} \mathbb{P}(k) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36}$.
2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,100]\!])$ alors $\mathbb{P}(X \in [95, +\infty[) = \mathbb{P}(X \geqslant 95) = \sum_{k=95}^{100} \mathbb{P}(k) = 6 \times \frac{1}{100}$.

Remarques.

1. Ce résultat montre que nous pourrons vraiment considérer les $\{X = a\}$ comme des issues. La probabilité des événements de la forme $\{X \in A\}$ est la somme des probabilités des "issues" $\{X = a\}$.

Proposition 85. Soient Ω un ensemble fini, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire, $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une application. $g \circ X$ est une variable aléatoire sur Ω que nous noterons $g(X)$.

Démonstration. Découle du fait que la composée de deux applications est une application.

Exemples.

1. Si $X(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{U}([\![-1;2]\!])$ et $g(x) = x^2 - 1$ alors $g(X) = X^2 - 1$ et $X^2 - 1(\Omega) =$
2. αX, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ est une variable aléatoire. Dans ce cas $g(x) = \alpha x$.

Remarques.

1. Autrement dit nous pourrons construire de nouvelles variables aléatoires avec des variables aléatoires déjà connues. Nous n'en parlons pas ici mais les probabilités se déduirons de celle de la variable aléatoire initiale.

II Somme de variables aléatoires.

Proposition 86. Soient Ω_1 et Ω_2 des ensembles finis, $X : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire, $Y : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. L'application Z définie sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ par : $\forall(\omega_1,\omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$, $Z(\omega_1,\omega_2) = X(\omega_1) + Y(\omega_2)$, est une variable aléatoire sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ appelée *somme des variables aléatoires X et Y* et on note $X + Y$.

Démonstration. Les applications X et Y sont toutes deux définies sur les univers Ω_1 et Ω_2 et à valeurs dans $\mathbb{R}$ donc l'application $(\omega_1,\omega_2) \mapsto X(\omega_1) + Y(\omega_2)$ est bien définie sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus $\Omega_1 \times \Omega_2$ est bien fini $|\Omega_1 \times \Omega_2| = |\Omega_1| \times |\Omega_2|$. Dans le cas fini la question de la mesurabilité ne se pose pas donc le résultat est évident.

Remarques.

1. Remarquons que l'application $X + Y$ est définie sur un produit cartésien donc il s'agit d'une application de deux variables ce qui n'est pas vraiment au programme. Ce qui nous intéresse se passe plutôt du côté des images donc nous n'aurons pas de difficultés avec cette notion.

Exemples.

1. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,6]\!])$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,6]\!])$ sont des variables aléatoires (sur un même univers ou sur des univers distincts), alors $Z = X + Y$ est une variable aléatoire dont le support est $[\![2,12]\!]$.

Exercice 267. On lance deux dés tétraédriques équilibrés dont les faces sont numérotées 1, 1, 2 et 2 pour le premier et 1, 2, 3 et 3 pour le second. On note X la variable aléatoire qui à chaque lancé du premier dé associe le numéro inscrit sur la face inférieure et Y celle pour le second dé. Soit $Z = X + Y$. Déterminez la loi de Z (en admettant que les deux lancers sont indépendants et donc les événements liés à l'un sont indépendants de ceux liés à l'autre).

Exercice 268. Soient $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{3}\right)$, $Y \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{4}\right)$ et $Z = X + Y$.

1. Calculez $\mathbb{P}(Z = 1)$.
2. Déterminez la loi de Z.
3. Calculez $\mathbb{P}_{Z=1}(X = 1)$.
4. Calculez $\mathbb{P}_{X=1}(Z = 2)$.

III Indépendance de variables aléatoires.

Définition 42. Deux variables aléatoires finies $X : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ et $Y : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ sont dites *indépendantes* si pour tout $x \in X(\Omega_1)$ et tout $y \in Y(\Omega_2)$, $\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y)$.

Remarques.

1. $\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbb{P}(\{X = x\} \text{ et } \{Y = y\})$.

2. La généralisation de cette définition à plus de deux variables aléatoires soulève une difficulté. Trois variables aléatoires peuvent être indépendantes deux à deux (comme dans la définition ci-dessus) mais pas mutuellement indépendantes :
$\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\} \cap \{Z = z\}) = \mathbb{P}(\{X = x\}) \times \mathbb{P}(\{Y = y\}) \times \mathbb{P}(\{Z = z\})$.
3. L'indépendance relève souvent d'une hypothèse de modélisation. Nous aurons rarement à la démontrer.

Exemples.

1. On lance deux dés équilibrés et indépendants et on note X_i la variable aléatoire valant 1 si le résultat du i-ième lancer est paire et 0 sinon et Y la variable aléatoire valant 1 si la somme des résultats est paire et 0 sinon. Les variables aléatoires X_1, X_2 et Y sont deux à deux indépendantes mais pas mutuellement indépendantes. Intuitivement on comprends que si on on connaît la parité de chaque résultat on connaît la parité de leur somme.
D'une part $\mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}) = \frac{9}{36}$ d'autre part $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{18}{36}$ donc $\mathbb{P}(\{X_i = 1\} \cap \{Y = 1\}) = \mathbb{P}(X_i = 1) \times \mathbb{P}(Y = 1)$.
De même : $\mathbb{P}(\{X_i = 1\} \cap \{Y = 0\}) = \mathbb{P}(X_i = 1) \times \mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(\{X_i = 0\} \cap \{Y = 1\}) = \mathbb{P}(X_i = 0) \times \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(\{X_i = 0\} \cap \{Y = 0\}) = \mathbb{P}(X_i = 0) \times \mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{4}$, , $\mathbb{P}(\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 1\}) = \mathbb{P}(X_1 = 1) \times \mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{4}$,...
Par contre : d'une part $\mathbb{P}(\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 1\} \cap \{Y = 1\}) = \frac{1}{4}$, d'autre part $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{2}$ donc $\mathbb{P}(\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 1\} \cap \{Y = 1\}) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(X_1 = 1) \times \mathbb{P}(X_2 = 1) \times \mathbb{P}(Y = 1)$.

Définition 43. Soient, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, X_2, \ldots, X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ des variables aléatoires indépendantes. On dit que $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit une *loi binomiale de paramètres n et p* et on note $X_1 + X_2 + \cdots + X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

Remarques.

1. On retrouve les critères vus au lycée concernant les schéma de Bernoulli : répétition à l'identique et de façon indépendante.
2. Cette définition est un peu plus générale que celle avec le schéma de Bernoulli car, variable aléatoire oblige, nous ne nous préoccupons pas des univers de départ des variables aléatoires suivants la même loi de Bernoulli. Peu importe que la première variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli corresponde à un lancer de dé et la seconde à un pile-ou-face, l'important est que ce soit la même loi (avec le même paramètre).

Exemples.

1. Si $n = 1$ alors on obtient une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli : $\mathscr{B}(1,p) = \mathscr{B}(p)$.
2. À un pile-ou-face on associe 1 si l'issue est pile et 0 sinon . La répétition, un nombre fini de fois, d'un tel pile-ou-face est en général modélisé par une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

IV Espérance.

Définition 44. Soit X une variable aléatoire sur un univers Ω. Si $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ alors on appelle espérance de X le nombre réel $\mathbb{E}(X) := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i)x_i$.

Exemples.

1. Si

x_i	-2	0	1	5
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

alors $E(X) = -2\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{10}+5\times\frac{1}{10} = -0{,}2$.

Remarques.

1. L'espérance est la valeur moyenne que l'on obtient pour la variable aléatoire en recommençant un grand nombre de fois l'expérience.
2. $E(X) \in \mathbb{R}$.
3. Cette présentation de la formule de l'espérance laisse entrevoir une généralisation : $E(X) = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x$.

Proposition 87. Espérance pour quelques lois.

(i) Si X suit une loi certaine dont le support est $c \in \mathbb{R}$ alors $\mathbb{E}(X) = c$.
(ii) Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ alors $\mathbb{E}(X) = p$.
(iii) Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$ alors $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$.
(iv) Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a,b \rrbracket)$ alors $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$.

Démonstration.

(i) La loi de probabilité de X est définie par la distribution

a	c
$\mathbb{P}(X = a)$	1

donc $\mathbb{E}(X) = 1 \times c = c$.

(ii) La loi de probabilité de X est définie par la distribution

a	0	1
$\mathbb{P}(X = a)$	$1-p$	p

donc $\mathbb{E}(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$.
(iii) $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$.
(iv) Somme des premiers termes d'une suite arithmétique.

Théorème 6. *Formule du transfert.* Soient Ω un ensemble, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire finie. Pour toute fonction f définie sur $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i) f(x_i)$.

Remarques.

1. Nous pouvons ainsi calculer les espérances de variables aléatoires construites à partir de variables aléatoires qui nous sont connues.
2. Nous utiliserons notamment ce résultat pour les calculs de variance puisqu'il faudra calculer l'espérance de la variable aléatoire $(X - \mathbb{E}(X))^2$.

Exemples.

1. Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ et $Y = 2X$ alors $\mathbb{E}(Y) = (1-p) \times 2 \times 0 + p \times 2 \times 1 = 2p$.
2. Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$ et $Y = X^2$ alors $\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} k^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. Si

x_i	-1	0	1
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$

alors $\mathbb{E}(X^2 - 1) =$

Proposition 88. Propriétés de l'espérance. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, X et Y des variables aléatoires réelles.

(i) $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$.
(ii) $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.
(iii) Si $X \geqslant 0$ alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.
(iv) Si $X \leqslant Y$ alors $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.
(v) Si X et Y sont indépendantes alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Démonstration.

(i) Corollaire du théorème de transfert.

(ii) Notons : $X(\Omega_1) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $Y(\Omega_2) = \{y_1, \dots, y_m\}$. Ce n'est pas la présentation de l'espérance donnée en définition mais l'écriture suivante lui est équivalente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X+Y) &= \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} (x_i + y_j)\mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j) \\
&= \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} x_i\mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j) + \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} yj\mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j) + \sum_{j=1}^{m} y_j \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i)x_i + \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(Y = y_j)y_j \\
&= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)
\end{aligned}$$

(iii) Si X est une variable aléatoire à valeurs positives alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$ en tant que somme de produits de nombres positifs.

(iv) $X \leqslant Y \Leftrightarrow Y - X \geqslant 0$, donc $\mathbb{E}(Y-X) \geqslant 0$ et, d'après un point précédent $\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X) \geqslant 0$.

Exemples.

1. Dans un lancer de dé à 6 faces le gain Y égale à 8 euros pour un nombre inférieur ou égale à 2 et de -5 euros sinon. $Y = 13X - 5$ où $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{3}\right)$.
   Donc $\mathbb{E}(Y) = 13\mathbb{E}(X) - 5 = 13 \times \frac{1}{3} - 5 = -\frac{2}{3}$.
2. Si $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(p_1)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(p_2)$ alors $\mathbb{E}(X_1 + X_2) = p_1 + p_2$.
3. Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ alors $\mathbb{E}(X+Y) = p + \frac{n+1}{2}$.
4. Si $X_1, X_2, \dots, X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ alors $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ et $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = \sum_{k=1}^{n} p = np$.

V Variance et écart-type.

Définition 45. Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle *variance* de X le réel $\mathbb{V}(X) := \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$.

On appelle alors *écart-type* le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Exemples.

1. Si

x_i	-2	0	1	5
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

alors $V(X) = (-2 - (-0{,}2))^2 \times \frac{1}{2} + (0 - (-0{,}2))^2 \times \frac{1}{10} + (1 - (-0{,}2))^2 \times \frac{3}{10} + (5 - (-0{,}2))^2 \times \frac{1}{10} = 4{,}76$.

Remarques.

1. On dit que la variance est un moment centré puisqu'on regarde l'écart par rapport à la moyenne : $X - \mathbb{E}(X)$.

Proposition 89. *Formule de Koenig-Huygens.* Soit X une variable aléatoire réelle. $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) &= \mathbb{E}\left(X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2\right) \\
&= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}\left(X\mathbb{E}(X)\right) + \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X)^2\right) \\
&= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2 \\
&= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2
\end{aligned}$$

Remarques.

1. Permet de calculer plus simplement la variance.

Exemples.

1. Si

x_i	-1	0	1
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$

alors $\mathbb{E}(X^2 - 1) =$ et

Proposition 90. Soient $x : \Omega \to \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires.

(i) $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$.

(ii) Si $\mathbb{V}(X) = 0$ alors X est une variable aléatoire certaine.

(iii) Si X et Y sont indépendantes $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Démonstration.

(i)

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(aX + b) &= \mathbb{E}((aX + b)^2) - \mathbb{E}(aX + b)^2 \\
&= \mathbb{E}\left(a^2X^2 + 2abX + b^2\right) - [a\mathbb{E}(X) + b]^2 \\
&= a^2\mathbb{E}(X^2) + 2ab\mathbb{E}(X) + b^2 - a^2\mathbb{E}(X)^2 - 2ab\mathbb{E}(X) - b^2 \\
&= a^2\left[\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2\right] \\
&= a^2\mathbb{V}(X)
\end{aligned}$$

(ii) Supposons $\mathbb{V}(X) = 0$ alors $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))]^2 = 0$. Autrement dit une somme de termes positifs est nulle donc tous les termes sont nuls et donc $X = \mathbb{E}(X)$.

(iii)

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X + Y) &= \mathbb{E}\left[(X + Y)^2\right] - [\mathbb{E}(X + Y)]^2 \\
&= \mathbb{E}\left(X^2\right) + 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}\left(Y^2\right) - [\mathbb{E}(X)]^2 - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - [\mathbb{E}(Y)]^2
\end{aligned}$$

Remarques.

1. Pour que $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ il faut que le nombre $\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ soit nul. Ce nombre est appelé la *covariance* de X et Y. Il est noté $\mathrm{cov}(X,Y)$. Ce nombre mesure l'indépendance des deux variables aléatoires réelles.

Proposition 91. Variance pour quelques lois. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(i) Si X est certaine alors $\mathbb{V}(X) = 0$.

(ii) Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ alors $\mathbb{V}(X) = p(1 - p)$.

(iii) Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ alors $\mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$.

(iv) Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$ alors $\mathbb{V}(X) = \dfrac{(b - a + 1)^2 - 1}{12}$.

(v) Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ alors $\mathbb{V}(X) = np(1 - p)$.

Démonstration.

(i) Si $X = a$ avec $a \in \mathbb{R}$ alors $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - a)^2\right) = \mathbb{P}(X = a)(a - a)^2 = 0$.

(ii) $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - p)^2\right) = (0 - p)^2 \times (1 - p) + (1 - p)^2 \times p = (1 - p)p(p + 1 - p) = p(1 - p)$.

(iii) Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1,n]\!])$ alors $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$ et donc $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(\left(X - \frac{n+1}{2}\right)^2\right) = \sum_{i=1}^n \left(i - \frac{n+1}{2}\right)^2 \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=1}^n \left(i - \frac{n+1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(i^2 - 2 \times i \times \frac{n+1}{2} + \left(\frac{n+1}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n i^2 - 2\frac{n+1}{2n}\sum_{j=1}^n j + \frac{(n+1)^2}{4n}\sum_{k=1}^n 1 = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\frac{n+1}{2n} \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)^2}{4n} \times n = (n+1)\left(\frac{2n+1}{6} - \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{4}\right) = (n + 1)\frac{n-1}{12}$.

(iv) Idem.

(v) Somme de variables aléatoires indépendantes : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(X_1)+\cdots+\mathbb{V}(X_n) = n\mathscr{V}(X_1) = np(1-p)$ car $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

Exercice 269. Une agence constate que le nombre d'appartements vendus chaque mois est une variable aléatoire X dont la loi peut être estimée statistiquement :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,02	0,06	0,08	0,25	0,2	0,13	0,12	0,08	0,06

Elle a constaté que les ventes des mois successifs étaient indépendantes.

1. Calculez l'espérance et l'écart-type du nombre annuel d'appartements vendus.
2. L'agence touche 1000 € pour la vente d'un appartement et les charges fixes annuelles s'élèvent à 50 000 €. Calculez l'espérance et la variance du bénéfice annuel de l'agence.

Exercice 270. On admet que la demande journalière de véhicules dans une agence de location est une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par

x_i	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,22	0,37	0,24	0,10	0,05	0,02

On suppose que les 3 véhicules de l'agence sont en état de marche.
Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de véhicules loués à la journée.

1. Déterminez la loi de Y.
2. Calculez l'espérance et la variance de Y.
3. Le prix de la location par jour et par voiture est de 50 €. Les frais supportés par l'agence sont en moyenne de 10 € par voiture et par jour, que le véhicule soit loué ou non, et de 10 € par véhicule loué.
   (a) Exprimez la variable aléatoire B égale au bénéfice journalier en fonction de Y.
   (b) Calculez l'espérance et la variance de B.

VI Exercices.

Exercice 271. Déterminez l'espérance et la variance de la somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois uniformes sur $[\![1,n]\!]$.

Exercice 272. Un concierge rentre d'une soirée. Il dispose de n clefs dont une seule ouvre la porte de son domicile, mais il ne sait plus laquelle. Il essaie les clefs les unes après les autres en éliminant après chaque essai la clef qui n'a pas convenu.

1. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef. *Commencez dans les cas $n = 1$, puis $n = 2$ et enfin $n = 3$.*
2. En réalité, la soirée était bien arrosée, et après chaque essai, le concierge remet la clef essayée dans le trousseau. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.

Exercice 273. À un péage autoroutier $n \in \mathbb{N}^*$ voitures franchissent au hasard et indépendamment l'une des trois barrières de péage mises à leur disposition. On note X_1 (resp. X_2, X_3) les variables aléatoires donnant le nombre de voitures ayant franchi la barrière 1 (resp. 2, 3).

1. Déterminez la loi de X_1.
2. Calculez les variances de X_1, X_2 et de $X_1 + X_2$.

Exercice 274. Soit n un entier naturel au moins égale à 4. D'une urne contenant n boules blanches et n boules noires, on extrait simultanément quatre boules. On admet que tous les tirages des quatre boules sont équiprobables et l'on désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le nombre de boules blanches obtenues.

1. Donnez la loi de probabilité de X.
2. Calculez l'espérance mathématique et montrez que c'est un nombre indépendant de n.
3. Pour $n \geqslant 4$ on pose $u_n = \mathbb{P}(X = 2)$. Quelle est la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 275. Un sac opaque contient huit jetons numérotés de 1 à 8, indiscernables au toucher. À trois reprises, un joueur pioche un jeton dans ce sac, note son numéro, puis le remet dans le sac. Dans ce contexte, on appelle « tirage » la liste ordonnée des trois numéros obtenus. Par exemple, si le joueur pioche le jeton numéro 4, puis le jeton numéro 5, puis le jeton numéro 1, alors le tirage correspondant est $(4;5;1)$.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. (a) Déterminer le nombre de tirages sans répétition de numéro.
   (b) En déduire le nombre de tirages contenant au moins une répétition de numéro.

On note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du premier jeton pioché, X_2 celle égale au numéro du deuxième jeton pioché et X_3 celle égale au numéro du troisième jeton pioché. Puisqu'il s'agit d'un tirage avec remise, les variables aléatoires X_1, X_2, et X_3 sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité.

3. Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X_1.
4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X_1

On note $S = X_1 + X_2 + X_3$ la variable aléatoire égale à la somme des numéros des trois jetons piochés.

5. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire S.
6. Déterminer $P(S = 24)$.
7. Si un joueur obtient une somme supérieure ou égale à 22, alors il gagne un lot.
   (a) $\{S = 4\}$ est réalisé par une seule issue. $\{S = 23\}$ est réalisé par trois issues (un seul des tirages obtient un 7). $\{S = 22\}$ est réalisé par 3 tirages comportant un 6 et 2 fis le 8, par 3 tirages comportant un 8 et 2 fois le 7. Tous les tirages sont équiprobables donc $\mathbb{P}(S \geqslant 22) = frac10512$.

Exercice 276. Un facteur doit livrer le courrier dans une rue comportant une seule rangée de maisons, numérotées de 1 à 5, et régulièrement espacées. Il doit livrer une lettre par maison. Pour cela :

- il commence par laisser son vélo à la maison 1 et y dépose la lettre correspondante ;
- puis il distribue les autres lettres dans les autres maisons au hasard ;
- il termine le parcours en revenant à la maison 1.

Le trajet suivi est représenté par les numéros successifs des maisons où il a déposé les courriers. Par exemple un trajet possible est $1 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1$. La distance totale parcourue, appelée longueur du trajet est alors : $|5-1| + |2-5| + |4-2| + |3-4| + |1-3| = 12$. Soit X la variable qui associe à chaque trajet sa longueur.

1. Combien y a-t-il de trajets possibles ?
2. Déterminez la loi de probabilité de X.
3. Quelle est l'espérance de la longueur du trajet ?

VII Corrections.

Exercice 266.

a) $X(\Omega) = [\![1,100]\!]$. $Y(\Omega) = \{80;30;0\}$
b) $X_1(\Omega) = \{-1;1\}$. $X_2(\Omega) = \{-2;0;2\}$. $X_3(\Omega) = \{-3;-1;1;3\}$. Quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, $X_{2n}(\Omega) = \{-2n, -2n+2, \ldots, 0, \ldots, 2n-2, 2n\}$ et $X_{2n+1}(\Omega) = \{-2n-1, -2n+1, \ldots, -1, 1, \ldots, 2n-1, 2n+1\}$.

Exercice 267. Un tableau double entrée est le plu simple pour faire apparaître les résultats.

Procédons différemment. $X(\Omega) = \{1;2\}$, $Y(\Omega) = \{1;2;3\}$, $Z(\Omega) = \{2;3;4;5\}$. $\mathbb{P}(Z = 2) = \mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}) = \mathbb{P}(X = 1) \times \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$. De même : $\mathbb{P}(Z = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(Z = 4) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$, $\mathbb{P}(Z = 5) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Exercice 268.

1. $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}\left[(\{X = 0\} \cap \{Y = 1\}) \cup (\{X = 1\} \cap \{Y = 0\})\right] = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{12}$.
2. $Z(\Omega) = [\![0,2]\!]$. $\mathbb{P}(Z = 0) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(Z = 2) = \frac{1}{12}$
3. $\mathbb{P}_{Z=1}(X = 1) \frac{\mathbb{P}(\{X=1\}\cap\{Z=1\})}{\mathbb{P}(Z=1)} = \frac{\mathbb{P}(\{X=1\}\cap\{Y=0\})}{\frac{5}{12}} \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{5}$.
4. $\mathbb{P}_{X=1}(Z = 2) = \frac{\mathbb{P}(X=1)\times\mathbb{P}(Y=1)}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$.

Exercice 269.

1. $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i)x_i = 0{,}02 \times 0 + 0{,}06 \times 1 + \cdots + 0{,}06 \times 8 = 4{,}18$. $\mathbb{V}(X) \approx 3{,}6876$ et $\sigma(X) \approx 1{,}9203$.
   $X_1, \ldots X_{12}$ suivent la loi de X, $Y = X_1 + \cdots + X_{12}$. $\mathbb{E}(Y) = 12\mathbb{E}(X)$ par linéarité. $\mathbb{E}(Y) = 50{,}16$. $\sigma(Y) = \sqrt{12}\sigma(X) \approx 6{,}6521$.
2. $\mathbb{E}(G) = \mathbb{E}(1000Y - 50000) = 1000\mathbb{E}(Y) - 50000 = 160$. $\mathbb{V}(1000Y - 50000) = 1000^2\mathbb{V}(Y) = 1000 \times 12\mathbb{V}(X) \approx 44251200$.

Exercice 270.

1. $Y(\Omega) = \{0,1,2,3\}$.

a	0	1	2	3
$\mathbb{P}(Y = a)$	0,22	0,37	0,24	0,17

2. $\mathbb{E}(X) = 1{,}36$.
   $\mathbb{V}(X) = (0 - 1{,}36)^2 \times 0{,}22 + (1 - 1{,}36)^2 \times 0{,}37 + (2 - 1{,}36)^2 \times 0{,}24 + (3 - 1{,}36)^2 \times 0{,}17 = 1{,}0104$
3. (a) $B = 50X - 3 \times 10 - 10X = 40X - 30$.
   (b) $\mathbb{E}(B) = 40\mathbb{E}(X) - 30$. $\mathbb{V}(B) = 40^2\mathbb{V}(X)$.

Exercice 271. $\mathbb{E}(X_1 + X_2) = n + 1$. $\mathbb{V}(X_1 + X_2) = \frac{n^2-1}{6}$.

Exercice 272.

1. Notons X la variable aléatoire qui, aux essais, associe le nombre d'essais nécessaire pour ouvrir la porte. $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$. $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\mathrm{A}_n^k}{\mathrm{A}_n^n} = \frac{1}{(n-k)!}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n-k)!} k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!}{n!} k \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} k!\end{aligned}$$

2. Soit Y la variable aléatoire comptant le nombre de d'essais nécessaires. $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Notons A_n l'événement le n^e essais est fructueux alors que tous les précédents ont échoués. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(A_n) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} \frac{1}{n}$.

Exercice 273.

1. $X_1 = Y_1 + \cdots + Y_n$ où $Y_i \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{3}\right)$.
2.

Exercice 274.

1. $X(\Omega) = [\![0,4]\!]$ et : $\forall k \in [\![0,4]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{n}{k}\binom{n}{4-k}}{\binom{2n}{4}}$.

2.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{4} \mathbb{P}(X=k)k \\
&= \sum_{k=0}^{4} \frac{\binom{n}{k}\binom{n}{4-k}}{\binom{2n}{4}} k \\
&= \frac{\binom{n}{1}\binom{n}{3}}{\binom{2n}{4}}(1+3) + \frac{\binom{n}{2}\binom{n}{2}}{\binom{2n}{4}}2 + \frac{\binom{n}{4}\binom{n}{0}}{\binom{2n}{4}}4 \\
&= \frac{1}{\binom{2n}{4}}\left(\frac{n \times n(n-1)(n-2)}{3\times 2}4 + \frac{n^2(n-1)^2}{2^2}2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times 3\times 2}4\right) \\
&= \frac{1}{\binom{2n}{4}} \times \frac{n(n-1)}{6}\left(4n(n-2)+3n(n-1)+(n-2)(n-3)\right) \\
&= \frac{1}{\binom{2n}{4}} \times \frac{n(n-1)}{6}\left(8n^2-16n+6\right) \\
&= \frac{1}{\binom{2n}{4}} \times \frac{n(n-1)}{3}\left(4n^2-8n+3\right)
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{4} &= \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{4\times 3\times 2} \\
&= \frac{n(n-1)(2n-1)(2n-3)}{3\times 2} \\
&= \frac{n(n-1)}{3} \times \frac{4n^2-8n+3}{2}
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 2.}$$

3. $u_n = \frac{n^2(n-1)^2\times 4!}{2^2\times 2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{6n^4}{2^4 n^4} = \frac{3}{8}$.

Exercice 275.

1. $\Omega = [\![1,8]\!]^3$ donc $8^3 = 512$ issues.
2. (a) $A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = 8\times 7\times 6 = 336$
   (b) $512 - 336 = 176$.
3. $X_1 \in [\![1,8]\!]$. $X_1 \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1,8]\!])$.
4. $\mathbb{E}(X_1) = \frac{1+8}{2} = 4{,}5$.
5. $\mathbb{E}(S) = 3\mathbb{E}(X_1) = 13{,}5$.
6. $P(S=24) = \mathbb{P}(\{X_1=8\}\cap\{X_2=8\}\cap\{X_3=8\}) = \frac{1}{8^3}$.
7. (a) Justifier qu'il existe exactement 10 tirages permettant de gagner un lot.
   (b) En déduire la probabilité de gagner un lot.

Exercice 276. On raisonne sur un arbre non pondéré du fait de l'équiprobabilité.

1. Il y a 24 chemins sur l'arbre.
2. En calculant les distances chemin après chemin : $X(\Omega) = \{8;10;12\}$. $\mathrm{Card}(X=8) = 8$, $\mathrm{Card}(X=10) = 8$ et $\mathrm{Card}(X=12) = 8$.
3. $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{3}(8+10+12) = 10$.

13. Échantillon de taille n d'une variable aléatoire.

I Échantillon de taille n.

Définition 46. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. Un *échantillon de taille n* de la variable aléatoire X est une n-liste de variables aléatoires $(X_1,X_2,\dots,X_n)$ indépendantes suivant toutes la même loi que X.

Exemples.

1. On lance 20 fois un dé parfaitement équilibré. On note, pour $i \in [\![1,20]\!]$, X_i la variable aléatoire égale à 3 si le résultat est strictement supérieur à 4 et -1 sinon. $(X_1,\dots,X_n)$ est un échantillon de la variable aléatoire X dont la distribution est $\left(\left(3,\frac{1}{3}\right),\left(-1,\frac{2}{3}\right)\right)$.
2. Soit $(X_0,X_1,\dots,X_n)$ un échantillon de taille $n+1$ d'une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ ($p \in]0,1[$). On note, pour $i \in [\![1,n]\!]$, $Y_i = X_i + X_{i-1}$. $(Y_1,\dots,Y_n)$ ne constitue pas un échantillon de la variable aléatoire $X_0 + X_1$ car Y_1 et Y_2 ne sont pas indépendantes.
3. Soient $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathscr{U}([\![0,1]\!])$. (X_1,X_2) ne constitue pas un échantillon de taille 2 car X_1 et X_2 ne suivent pas la même loi (si $p \neq \frac{1}{2}$).

Remarques.

1. On parle aussi de variables indépendantes et identiquement distribuées.
2. Si $(X_1,X_2,\dots,X_n)$ est un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X, la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ est appelée la variable aléatoire *somme de l'échantillon* et la variable aléatoire $M_n = \frac{S_n}{n}$ est appelée la variable aléatoire *moyenne de l'échantillon*.

Proposition 92. Soient : $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire, $(X_1,X_2,\dots,X_n)$ un échantillon de taille n de X, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ la variable aléatoire somme de l'échantillon, $M_n = \frac{S_n}{n}$ la variable aléatoire moyenne de l'échantillon. $\mathbb{E}(S_n) = n\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(S_n) = n\mathbb{V}(X)$, $\sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma(X)$. $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(M_n) = \frac{1}{n}\mathbb{V}(X)$, $\sigma(M_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(X)$.

Démonstration.

* $\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(X_1+X_2+\cdots+X_n) = \mathbb{E}(X_1)+\mathbb{E}(X_2)+\cdots+\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(X)+\cdots+\mathbb{E}(X) = n\mathbb{E}(X)$.
* $\mathbb{V}(S_n) = \mathbb{V}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X_2) + \cdots + \mathbb{V}(X_n)$ car les variables X_1, X_2,..., X_n sont indépendantes. $\mathbb{V}(S_n) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(X) + \cdots + \mathbb{V}(X) = n\mathbb{V}(X)$.
* $\sigma(S_n) = \sqrt{\mathbb{V}(S_n)} = \sqrt{n\mathbb{V}(X)} = \sqrt{n}\sigma(X)$.
* $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(X)$.
* $\mathbb{V}(M_n) = \mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2\mathbb{V}(S_n) = \frac{1}{n^2} \times n\mathbb{V}(X) = \frac{1}{n}\mathbb{V}(X)$.
* $\sigma(M_n) = \sigma\left(\mathbb{V}(M_n)\right) = \sqrt{\frac{1}{n}\mathbb{V}(X)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(X)$.

Exercice 277. On étudie la marche aléatoire d'une particule se déplaçant sur les points d'abscisses entières d'un axe gradué d'origine O. La particule est à l'origine au temps 0 et se déplace de chaque unité de temps d'une unité vers la droite avec la probabilité $\frac{1}{2}$ ou d'une unité vers la gauche avec la probabilité $\frac{1}{2}$. On suppose les déplacements de la particule indépendants les uns des autres. Pour tout entier naturel k non nul on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le k-ième déplacement a lieu vers la droite et qui vaut -1 dans le cas contraire. Pour tout entier naturel n non nul, on note S_n l'abscisse de la particule à l'instant n.

1. Donnez, pour tout entier naturel non nul k l'espérance et la variance de X_k.
2. Pour tout entier naturel non nul n, exprimer S_n en fonction de certaines des variables X_k.
3. En déduire l'espérance et la variance de S_n.

Exercice 278. Une machine remplit des pots de yaourts dont la masse en grammes est une variable aléatoire Y d'espérance 125 et d'écart-type 1,2. On suppose que les remplissages des pots sont indépendants.

1. Exprimez la masse d'un lot de 16 comme la variable aléatoire somme S_{16} d'un échantillon de 16 pots.
2. Déterminez l'espérance de S_{16}.
3. Montrez que l'écart-type de S_{16} est 4,8.

II Application à la loi binomiale.

Proposition 93. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$. $\mathbb{E}(X) = np$, $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Démonstration. $X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ où $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ est un échantillon de taille n d'une variable aléatoire $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ et on applique la précédente proposition en sachant que $\mathbb{E}(Y) = p$, $\mathbb{V}(Y) = p(1-p)$.

Exemples.

1. Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(100, \frac{1}{4}\right) = 100 \times \frac{1}{4} = 25$ et $\mathbb{V}(X) = 100 \times \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 18{,}75$.

Exercice 279. Une étude statistique a été réalisée sur le temps d'attente en secondes subi par la clientèle avant d'être mise en communication avec un standardiste. La variable aléatoire T qui a tout client associe son temps d'attente a pour espérance 18 et pour écart-type 7. On estime que la probabilité qu'un client ait une attente de plus de 20 s est de 0,4.

1. Au cours d'une même semaine un client passe 5 appels indépendants les uns des autres. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de fois que l'appel à dépassé 20 s. Déterminez l'espérance et l'écart-type de X.
2. Dans le but de diminuer le temps d'attente, on effectue une enquête sur un échantillon de 100 clients. Soit Y la variable aléatoire exprimant le temps d'attente moyen en secondes pour un échantillon de 100 clients. Déterminez l'espérance et l'écart-type de Y.

Exercice 280. On interroge de manière indépendante 300 personnes lors d'un sondage sur la réalisation d'un projet d'urbanisme. On note X_i la variable aléatoire qui vaut 0 si la i-ième personne interrogée est opposée au projet et 1 si elle y est favorable ; la probabilité qu'elle soit opposée au projet est 0,365.

1. Donnez la loi de probabilité des X_i.
2. On note $S = X_1 + \cdots + X_{300}$. Donnez en justifiant la loi de probabilité de la variable aléatoire S puis calculez et interprétez $\mathbb{P}(S > 100)$.

III Exercices.

Exercice 281. Une machine produit des joints dont l'épaisseur définit une variable aléatoire X d'espérance 2 mm et d'écart-type 0,1 mm. Soit M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X.

1. Déterminez l'espérance de M_n.
2. Calculez l'écart-type de M_{100} puis de $M_{10\,000}$.

Exercice 282. Dans une population d'adultes la variable aléatoire X associe à chaque individu sa glycémie en milligrammes par 100 millilitres. On suppose que X a pour espérance 92 et pour écart-type 7. Soit M_{400} la variable aléatoire d'un échantillon de taille 400 de la variable aléatoire X. Déterminez l'espérance et l'écart-type de M_{400}.

Exercice 283. Sur des paquets de cartes à collectionner il est écrit que 20 % des paquets comportent une et une seule carte rare.

1. Déterminez la loi de probabilité de la variable aléatoire C qui à chaque paquet associe le nombre de cartes rares.
2. On achète 12 paquets : le nombre de cartes rares de ce lot est modélisé par un échantillon de taille 12 de la variable aléatoire C, noté $(C_1, \ldots, C_{12})$. Expliquez pourquoi il est plausible d'affirmer que les variables aléatoires formant cet échantillon sont indépendantes.
3. Déterminez la loi de probabilité de $L = C_1 + \cdots + C_{12}$.
4. A-t-on plus de 50 % de chance d'avoir récupéré 4 cartes rares ?

Exercice 284. La masse en grammes d'un paquet de café est donnée par un variable aléatoire C d'espérance 250 et de variance 4. Soit L la variable aléatoire donnant la masse en grammes d'un lot de deux paquets. On suppose les masses des deux paquets indépendantes entre elles. Déterminez $\mathbb{E}(L)$ et $\mathbb{V}(L)$.

Exercice 285. Afin de mieux sécuriser les achats en ligne, certaines cartes bancaires ont un cryptogramme dynamique : ce code de sécurité qui figure au dos de la carte change chaque heure de manière « aléatoire » : chaque cryptogramme est composé de trois chiffres et les combinaisons de trois chiffres identiques, comme 111 ou 888 sont exclues.

1. Combien de cryptogrammes différents la carte bancaire peut-elle générer ?
2. Combien de cryptogrammes comporte deux fois le même chiffre ?
3. On note D la variable aléatoire valant 1 si le cryptogramme comportent deux fois le même chiffre et 0 sinon. Établissez la loi de probabilité de la variable aléatoire D.
4. $(D_1, \ldots, D_{24})$ est un échantillon de taille 24 de la variable aléatoire D et $S = D_1 + \cdots + D_{24}$. Calculez $\mathbb{P}(S \geqslant 2)$.

Exercice 286. On réalise des semis dans des pots séparés et cultivés dans les mêmes conditions et on constate qu'ils survivent au bout de 2 mois dans 78 % des cas.

1. On note V la variable aléatoire qui à chaque semis associe 1 s'il est vivant au bout de deux mois et 0 sinon. Établissez la loi de V.
2. 500 semis ont été plantés. On les modélise par un échantillon $(V_1, \ldots V_{500})$ de taille 500 de V et on note $S = V_1 + \cdots + V_{500}$. Déterminez la loi de probabilité de S.
3. Calculez la probabilité $\mathbb{P}(S > 400)$ et interprétez ce résultat.

Exercice 287. Le jeu des mille euros est un jeu radiophonique au cours duquel une équipe de deux candidats doit répondre successivement à six questions de difficulté progressive : trois questions bleues, deux questions blanches et une question rouge. On estime que la probabilité de répondre juste à une question bleue est 0,95, celle de répondre juste à une question blanche est de 0,90 et celle de répondre juste à une question rouge est de 0,80. Les

questions sont indépendantes entre elles. On note X la variable aléatoire qui, à une équipe, associe le nombre de réponses justes aux questions bleues, Y la variable aléatoire qui, à une équipe, associe le nombre de réponses justes aux questions blanches, et Z la variable aléatoire qui, à une équipe, associe 1 si elle répond juste à la question rouge et 0 sinon.

1. Déterminez les lois suivies par X, Y et Z.
2. Déterminez l'espérance et la variance de chacune de ces variables aléatoires.
3. On appelle R la variable aléatoire qui, à une équipe, associe le nombre total de réponses justes. Déterminez l'espérance et la variance de R.
4. Les candidats qui ont 6 bonnes réponses justes accèdent directement à la question Banco, et ceux qui ont 5 réponses justes passent par un repêchage pour accéder au Banco. On estime que la probabilité de répondre correctement à la question de repêchage est de 0,8.
   (a) Illustrez la situation par un arbre pondéré.
   (b) Quelle est la probabilité d'accéder directement à la question Banco ?
   (c) Quelle est la probabilité de passer par un repêchage ?
   (d) Quelle est la probabilité d'accéder au Banco ?
5. La probabilité de répondre juste à la question Banco est de 0,4. Quelle est la probabilité pour une équipe de candidats qui se présente au jeu, de remporter le Banco ?

Exercice 288.

IV Corrections.

Exercice 277.

1. $X_k \hookrightarrow \mathscr{U}(\{-1;1\})$. $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{V}(X) = 1$.
2. $S_n = \sum_{k+1}^{n} X_k$.
3. $\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = 0$ et Puisque les X_k sont indépendantes : $\mathbb{V}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) = n$.

Exercice 278.

1. Soit X_i la masse du i-ème pot d'un échantillon de 16 pots. D'après l'énoncé les X_i suivent la même loi que Y et de plus sont indépendantes deux à deux. Donc en notant $S_{16} = X_1 + \cdots + X_{16}$ nous avons bien S_{16} variable aléatoire somme d'un échantillon de taille 16 de la variable aléatoire Y.
2. $\mathbb{E}(S_{16}) = 16 \times \mathbb{E}(Y) = 16 \times 125 = 2000$ g.
3. $\mathbb{V}(S_16) = \frac{1}{16}\mathbb{V}(Y) = \frac{1}{16} \times 1{,}2^2 = 0{,}09$ donc $\sigma(X) = 0{,}3$ g.

Exercice 279.

1. $X \hookrightarrow \mathscr{B}(5;0{,}4)$ donc $\mathbb{E}(X) = 5 \times 0{,}4 = 2$ et $\sigma(X) = \sqrt{5 \times 0{,}4 \times (1 - 0{,}4)}$.
2. $\mathbb{E}(Y) = 100\mathbb{E}(T) = 100 \times 18 = 1800$. $\sigma(Y) = \sqrt{100}\sigma(T) = 10 \times 7 = 70$.

Exercice 280.

1. $\forall i \in [\![1{,}300]\!]$),$X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(0{,}365)$.
2. Les variables aléatoires X_i, pour $i \in [\![1{,}300]\!]$, suivent toutes la même loi de Bernoulli et sont supposées indépendantes donc la variable aléatoire somme de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_{300})$ suit une loi binomiale : $X_1 + \cdots + X_{300} \hookrightarrow \mathscr{B}(300{,}0{,}365)$. $\mathbb{P}(S > 100) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{S > 100}\right) = 1 - \mathbb{P}(S \leqslant 99)$. En utilisant la fonction de répartition de la loi binomiale programmée dans la calculatrice on obtient : $\mathbb{P}(S > 100) \approx 1{,}89 \times 10^{-20}$.

Exercice 281.

1. $\mathrm{E}(M_n) = \mathrm{E}(X) = 2$.
2. $\sigma(M_{100}) = \frac{1}{\sqrt{100}}\sigma(X) = 0{,}01$ puis de $\sigma(M_{10\,000}) = \frac{1}{\sqrt{10000}}\sigma(X) = 0{,}0001$.

Exercice 282. $\mathbb{E}(M_{400}) = 400 \times \mathbb{E}(X) = 400 \times 92 = 9200$.
$\sigma(M_{400}) = \sqrt{400}\sigma(X) = 200 \times 7 = 1400$ mg/dℓ.

Exercice 283.

1. $C \hookrightarrow \mathscr{B}(0{,}20)$.
2.
3. $L \hookrightarrow \mathscr{B}(12; 0{,}2)$.
4. $\mathbb{P}(L = 4) = \binom{12}{4} 0{,}2^4 (1 - 0{,}2)^{12-4}$.

Exercice 284. $\mathbb{E}(L) = 2\mathbb{E}(C) = 2 \times 250 = 500$ et $\mathbb{V}(L) = 2\mathbb{V}(C) = 2 \times 4 = 8$.

Exercice 285.

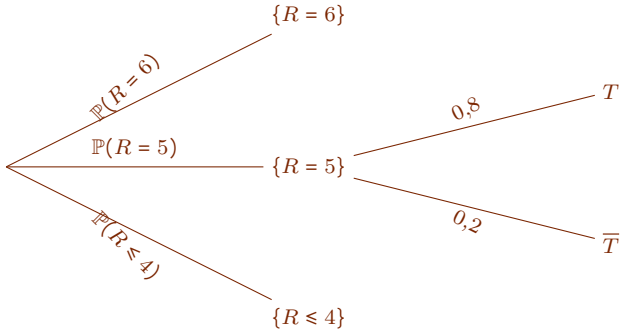
1. $10^3 - 10 = 990$.
2. Choisir deux chiffres distincts : $\binom{10}{2}$. En choisissant celui qui sera répété : $2\binom{10}{2}$. En choisissant l'emplacement du chiffre qui n'est pas répété : $3 \times 2\binom{10}{2} = 225$.
3. $D \in \{0; 1\}$. $\mathbb{P}(D = 1) = \frac{225}{990} = \frac{5}{22}$ et $\mathbb{P}(D = 0) = 1 - \frac{225}{990} = \frac{765}{990}$.
4. $D \hookrightarrow \mathbb{B}\left(\frac{225}{900}\right)$ donc $S = D_1 + \cdots + D_{24} \hookrightarrow \mathscr{B}\left(24, \frac{225}{990}\right)$. $\mathbb{P}(S \geqslant 2) = 1 - \mathbb{P}(D = 0) - \mathbb{P}(D = 1) = 1 - binom240 \left(\frac{5}{22}\right)^0 \left(1 - \frac{5}{22}\right)^{24} - binom241 \left(\frac{5}{22}\right)^1 \left(1 - \frac{5}{22}\right)^{24-1} \approx 0{,}9834$.

Exercice 286.

1. $V \hookrightarrow \mathscr{B}(0{,}78)$.
2. $S \hookrightarrow \mathscr{B}(500; 0{,}78)$.
3. $\mathbb{P}(S > 400) = \mathbb{P}(S \geqslant 401) = 1 - \mathbb{P}(S \leqslant 400) \approx 0{,}1278$.

Exercice 287.

1. En admettant l'indépendance des questions : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(3; 0{,}95)$, $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(2; 0{,}9)$ et $Z \hookrightarrow (0{,}8)$.
2. $\mathscr{E}(X) = 3 \times 0{,}95 = 2{,}85$, $\mathscr{V}(X) = 0{,}1425$. $\mathscr{E}(Y) = 2 \times 0{,}9 = 1{,}8$, $\mathscr{V}(Y) = 2 \times 0{,}9 \times 0{,}1 = 0{,}18$. $\mathscr{E}(Z) = 0{,}8$, $\mathscr{V}(Z) = 0{,}16$.
3. $R = X + Y + Z$. $\mathscr{E}(R) = \mathscr{E}(X) + \mathscr{E}(Y) + \mathscr{E}(Z) = 2{,}85 + 1{,}8 + 0{,}8 = 3{,}45$. En admettant que les questions des diverses couleurs sont indépendantes : $\mathscr{V}(R) = \mathscr{V}(X) + \mathscr{V}(Y) + \mathscr{V}(Z) = 0{,}1425 + 0{,}18 + 0{,}16 = 0{,}4825$.
4. (a) En notant T l'événement réussir la question de repêchage :



   (b) $\{R = 6\} = \{X = 3\} \cap \{Y = 2\} \cap \{Z = 1\}$. Les questions étant indépendantes : $\mathbb{P}(R = 6) = \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(Y = 2) + \mathbb{P}(Z = 1) = \binom{3}{3} 0{,}95^3 \times 0{,}05^0 \times \binom{2}{2} 0{,}9^2 \times 0{,}1^0 + 0{,}8 = 0{,}555579$.

   (c) $\{R = 5\} = (\{X = 2\} \cap \{Y = 2\} \cap \{Z = 1\}) \cup (\{X = 3\} \cap \{Y = 1\} \cap \{Z = 1\}) \cup (\{X = 3\} \cap \{Y = 2\} \cap \{$ Les événements étant disjoints : $\mathbb{P}(R = 5) = \mathbb{P}(\{X = 2\} \cap \{Y = 2\} \cap \{Z = 1\}) + \mathbb{P}(\{X = 3\} \cap \{Y = 1$ $\mathbb{P}(\{X = 3\} \cap \{Y = 2\} \cap \{Z = 0\})$. Du fait de l'indépendance : $\mathbb{P}(R = 5) = \mathbb{P}(\{X = 2\}) \times \mathbb{P}(\{Y = 2\}) \times (\{Z = 1\}) + \mathbb{P}(\{X = 3\}) \times \mathbb{P}(\{Y = 1\}) \times (\{Z = 1\}) + \mathbb{P}(\{X = 3\}) \times \mathbb{P}(\{Y = 2\}) \times (\{Z = 0\}) = 0{,}135375 \times 0{,}81 \times 0{,}8 + 0{,}857375 \times 0{,}18 \times 0{,}8 + 0{,}857375 \times 0{,}81 \times 0{,}2 \approx 0{,}35007975$.

   (d) En notant B l'événement accéder au banco : $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(R = 6) + \mathbb{P}(\{R = 5\} \cap T) = \mathbb{P}(R = 6) + \mathbb{P}(\{R = 5\})\mathbb{P}_{\{R=5\}}(T) \approx 0{,}555579 + 0{,}35007975 \times 0{,}8 \approx 0{,}8356428$.
5. $0{,}8356428 \times 0{,}4 \approx 0{,}33425712$.

Exercice 288.

14. Concentration, loi des grands nombres.

I Inégalités de concentration.

Théorème 7. *Inégalité de Markov.* Soit X une variable aléatoire réelle positive. Pour tout $a > 0$, $\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$.

Exemples.

1. Le nombre de pièces fabriquées dans une usine en une journée est une variable aléatoire d'espérance 50 et de variance 25.
   Majorons la probabilité que la production dépasse 75 pièces quotidiennes.
   $\mathbb{P}(X \geqslant 75) \leqslant \frac{50}{75} = \frac{2}{3}$.

Exercice 289. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n]\!]$. Montrez que, pour tout $c \in]\!]0,n[\![$: $\frac{\mathbb{E}(X)-c-1}{n-c} \leqslant \mathbb{P}(X \geqslant c) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)-1}{c-1}$.

Théorème 8. *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.* Soit X une variable aléatoire réelle finie. On note $\mu := \mathbb{E}(X)$ et $V := \mathbb{V}(X)$. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}\left(|X-\mu| \geqslant x\right) \leqslant \frac{V}{x^2}$.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

* Dans le cas fini.
Si $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ avec $n \in \mathbb{N}$ alors $A = \{|X-\mu| > a\}$ est fini et on peut en noter a_1, ..., a_k (avec $k \in [\![1,n]\!]$) les éléments ou $A = \varnothing$. Dans ce dernier cas le résultat est évident.

$$\mathbb{V}(X) = (x_1-\mu)^2\mathbb{P}(X = x_1) + \cdots + (x_n-\mu)^2\mathbb{P}(X = x_n)$$

et nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &\geqslant (a_1-\mu)^2\mathbb{P}(X = a_1) + \cdots + (a_k-\mu)^2\mathbb{P}(X = a_k)\\
\mathbb{V}(X) &\geqslant a^2\mathbb{P}(X = a_1) + \cdots + a^2\mathbb{P}(X = a_k)\\
\mathbb{V}(X) &\geqslant a^2\left[\mathbb{P}(X = a_1) + \cdots + \mathbb{P}(X = a_k)\right]\\
\mathbb{V}(X) &\geqslant a^2\mathbb{P}(X \in A)\\
\frac{\mathbb{V}(X)}{a^2} &\geqslant \mathbb{P}(A)
\end{aligned}$$

* En appliquant l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $(X-\mathbb{E}(X))^2$ et $a = x^2$.

Exemples.

1. Loi binomiale $\mathscr{B}(4;0{,}5)$.
2. Loi uniforme $\mathscr{U}([\![1,n]\!])$.
3. Pour $x = 2\sigma$ on a $\mathbb{P}\left(|X-\mu| \geqslant 2\sigma\right) \leqslant \frac{V}{4\sigma^2} = \frac{1}{4}$. Autrement dit la probabilité pour qu'une variable aléatoire prenne une valeur de plus du double de son écart-type est inférieur à 0,25.

4. Le nombre de pièces fabriquées dans une usine en une journée est une variable aléatoire d'espérance 50 et de variance 25. Majorons la probabilité que la production dépasse 74 pièces quotidiennes.
$\mathbb{P}(X > 74) = \mathbb{P}(X - 50 > 24) \leqslant \mathbb{P}(|X - 50| \geqslant 25) \leqslant \frac{25}{25^2} = \frac{1}{25}$.
5. On lance 800 fois une pièce non truquée.
Donnons une minoration de la probabilité que le nombre de piles obtenus soit compris entre 381 et 419.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(381 \leqslant X \leqslant 419) &= \mathbb{P}(381 - 400 \leqslant X - 400 \leqslant 419 - 400)\\ &= \mathbb{P}(-19 \leqslant X - 400 \leqslant 19)\\ &= \mathbb{P}(|X - 400| \leqslant 19)\\ &= 1 - \mathbb{P}(|X - 400| > 19)\end{aligned}$$

Or $\mathbb{P}(|X - 400| \geqslant 20) \leqslant \frac{800\times 0{,}5\times 0{,}5}{20^2} \leqslant \frac{1}{2}$ donc $\mathbb{P}(381 < X < 419) \geqslant 1 - \frac{1}{2}$

Remarques.
1. Nous retrouvons l'idée que les valeurs de la variable aléatoire s'éloigne d'environ σ de l'espérance : $\mathbb{P}\left(|X - \mu| > x\right) \leqslant \left(\frac{\sigma}{x}\right)^2$.
2. $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant x) = 1 - \mathbb{P}(\mathbb{E}(X) - x < X < \mathbb{E}(X) + x)$. L'intervalle $[\mathbb{E}(X) - x; \mathbb{E}(X) + x]$ est appelé un intervalle de fluctuation de X.

Exercice 290. On lance 3 600 fois une pièce non truquée. On note X la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus.

1. Écrivez l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev dans ce cas.
2. Minorez la probabilité que le nombre d'apparition de piles soit strictement compris entre 1 600 et 2 000.

Exercice 291. On note X le nombre d'avions atterrissant sur un aéroport sur le créneau horaire 14h-15h. On estime que $\mathbb{E}(X) = 16$ et $\mathbb{V}(X) = 4$.

1. Écrivez l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev relative à X.
2. Déterminez une minoration de la probabilité qu'il arrive entre 12 et 20 avions sur cet aéroport entre 14h et 15h.

Exercice 292. On considère une variable aléatoire X d'espérance μ et d'écart-type σ.

1. Écrivez l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev relative à X.
2. Déterminez les valeurs de σ pour que nous ayons $\mathbb{P}\left(|X - \mu| < 15\right) \geqslant 0{,}96$.

Exercice 293. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre d'objets produits par une entreprise. On sait que $\mathbb{E}(X) = 50$ et $\mathbb{V}(X) = 25$.

1. (a) Justifiez que $\mathbb{P}(X \geqslant 75) \leqslant \mathbb{P}\left(|X - 50| \geqslant 25\right)$.
   (b) Majorez la probabilité que la production du mois à venir dépasse 75 objets.
2. Minorez la probabilité que la production du mois à venir soit strictement comprise entre 40 et 60 matelas.

Exercice 294. Un avion peut transporter 100 passagers et leurs bagages. Sans les passagers, ni les bagages, mais avec l'équipage et le carburant il pèse 120 tonnes. Les consignes de sécurité interdisent le décollage de l'appareil si le poids dépasse 129,42 tonnes. Les 100 places sont occupées.

Le poids d'un voyageur suit une loi d'espérance 70 kg et d'écart-type 10 kg. Le poids de ses bagages suit une loi d'espérance 20 kg et d'écart-type 1 kg. Toutes ces variables sont supposées indépendantes.

1. (a) Calculez l'espérance du poids de l'avion au décollage.
   (b) L'espérance calculée est-elle conforme aux normes de sécurité ?
2. Calculez l'écart-type du poids total de l'appareil.
3. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, trouvez un majorant de la probabilité pour que le poids réel de l'appareil au décollage dépasse 129,42 tonnes.

II L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev dans le cas de la moyenne d'un échantillon.

Proposition 94. Soit M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V. Quel que soit x réel, $\mathbb{P}\left(|M_n - \mu| \geqslant x\right) \leqslant \frac{V}{nx^2}$.

Démonstration. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $\mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(M_n)| > x) \leqslant \frac{\mathbb{V}(M_n)}{x^2}$. Or $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(X) = \mu$ et $\mathbb{V}(M_n) = \frac{\mathbb{V}(X)}{n}$ donc : $\mathbb{P}(|M_n - \mu| \geqslant x) \leqslant \frac{V}{nx^2}$.

Exercice 295. On effectue n tirages successifs avec remise d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. Notons X la variable aléatoire qui à un tirage associe 1 si boule tirée est rouge et 0 sinon. Notons encore M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X.

1. Déterminez $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ puis donnez l'inégalité de concentration relative à M_n.
2. À partir de quel nombre de tirages pouvons-nous garantir à plus de 95 % que la proportion de boules rouges obtenues restera strictement entre 0,35 et 0,45.

Exercice 296. Une épreuve consiste à tirer au hasard 10 jetons avec remise dans un sac contenant 40 % de jetons bleus. On appelle X la variable aléatoire qui, à cette série de tirages, associe le nombre de jetons bleus obtenus.

1. (a) Justifiez que X suit la loi binomiale de paramètres 10 et 0,4.
   (b) Déterminez l'espérance de X.
   (c) Montrez que la variance de X est 2,4.
2. Montrez en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que $\mathbb{P}(|X - 4| \geqslant 2) \leqslant 0{,}6$.
3. (a) Quel est l'événement contraire de l'événement $\{|X - 4| \geqslant 2\}$?
   (b) Montrez que $\mathbb{P}(|X - 4| < 2) \geqslant 0{,}4$.

Exercice 297. Soit T la variable aléatoire qui à chaque enfant français de 1 an associe sa taille en centimètre. Des statistiques permettent d'estimer que cette variable a pour espérance 50 et pour écart-type 2.

1. Déterminez l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de T de taille 10 000.
2. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, majorez la probabilité que cette taille moyenne s'écarte de 50 cm d'au moins 0,1 cm.

Exercice 298. On lance n fois un dé équilibré à 6 faces. On note X la variable aléatoire qui a un lancé associe 1 si la face 1 sort et 0 sinon. On note M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X.

1. Déterminez $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$, et écrivez l'inégalité de concentration relative à M_n.
2. Combien suffit-il d'effectuer de lancers pour que la fréquence de sortie de la face 1 s'écarte de plus de $\frac{1}{100}$ de la valeur $\frac{1}{6}$ avec une probabilité inférieure ou égale à 0,95 ?

III Loi faible des grands nombres.

Proposition 95. *Théorème de la loi faible des grands nombres.* Soit M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ. Quel que soit $x > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|M_n - \mu| \geqslant x\right) = 0$.

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

D'après l'inégalité de concentration de Bienaymé-Tchebychev : $0 \leqslant \mathbb{P}(|M_n - \mu| \geqslant x) \leqslant \frac{V}{nx^2}$ et nous concluons grâce au théorème des gendarmes.

Remarques.

1. La probabilité que la moyenne des valeurs d'un échantillon s'éloigne de l'espérance de la variable aléatoire diminue à mesure que l'échantillon croît. Cette décroissance est rapide puisque de l'ordre de $\frac{1}{x^2}$.
2. Pour un pile-ou-face dont pile est le succès : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ et la probabilité que le nombre moyen de pile s'éloigne de p de n'importe quelle longueur x tend vers 0 lorsque la taille de l'échantillon augmente. On peut obtenir la précision (en probabilité) que l'on veut en augmentant la taille de l'échantillon.
3. C'est un résultat très important puisqu'il fait la passerelle (que nous considérons souvent comme intuitive) entre les statistiques et les probabilités. Si dans un sondage 20 % répondent oui, nous avons l'intuition que la probabilité de choisir au hasard une personne répondant oui est de 0,2. Si je lance un grand nombre de fois une pièce et que j'obtiens en moyenne presque 0,5 je peux affirmer que la pièce est équilibrée.
4. Cela signifie que l'espérance d'une variable aléatoire est assez simple à obtenir expérimentalement : c'est, à peu près, la moyenne des valeurs obtenues.

Exercice 299. Soit X variable aléatoire d'espérance 5 et de variance 2. Justifiez qu'il existe un entier naturel n tel que $\mathbb{P}\left(|M_n - 5| \geqslant 2\right) \leqslant 10^{-26}$.

IV Exercices.

Exercice 300. On définit le sex-ratio d'une population comme le rapport du nombre de naissances de garçons sur le nombre de naissance de filles. Pour la population mondiale il est de 1,05. Pour la Chine il est de 1,13 (données 2019).

1. Montrez que la proportion p_m de naissances féminines pour la population mondiale est 0,488 à 10^{-3} près, et que cette proportion p_c pour la Chine est 0,469 à 10^{-3} près.
2. Soit la variable X qui a un groupe de 1,3 milliard d'êtres humains (population de la Chine) associe le nombre de femmes de ce groupe.
   (a) Justifiez que X suit une loi binomiale et précisez-en les paramètres.
   (b) On définit la variable aléatoire $F = \frac{1}{1{,}3\times10^9}X$. Que représente F ?
   (c) Déterminez l'espérance et la variance de F.
3. (a) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donnez une majoration de la probabilité $\mathbb{P}\left(\|F - p_m\| > 10^{-2}\right)$.
   (b) En considérant la proportion de naissances féminines p_c de la Chine comme une réalisation de la variable aléatoire F majorez la probabilité qu'elle se produise.
   (c) Que peut-on en penser ?

Exercice 301. Dans une population donnée on note p la proportion de personnes en accord avec un projet de loi. Cette proportion p est inconnue, mais on sait qu'elle se situe dans l'intervalle $[0{,}2; 0{,}8]$. Pour chaque personne tirée au hasard dans cette population on définit

la variable aléatoire A valant 1 si cette personne est d'accord avec le projet de loi et 0 sinon. On suppose que les réponses des personnes sont toutes indépendantes entre elles.

1. Pour tout entier naturel n non nul, soit S_n la variable aléatoire somme d'un échantillon de taille n de la loi de A.
   (a) Quelle est la loi de S_n ?
   (b) Déduisez-en $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$, puis l'espérance et la variance de $F_n = \frac{S_n}{n}$, variable aléatoire donnant la fréquence des personnes disant « oui au projet de loi » dans un échantillon de taille n.
2. Soit δ un nombre réel. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donnez une minoration de $\mathbb{P}(|F_n - p| < \delta)$ en fonction de n, p et δ
3. (a) Montrez, en utilisant les variations de la fonction $p \mapsto p(1-p)$ que $p(1-p) \geqslant 0{,}16$.
   (b) Donnez une valeur de l'entier n tel que $\mathbb{P}(|F_n - p| < 0{,}1) \geqslant 0{,}95$.
4. On effectue un sondage sur un échantillon de 350 personnes et on obtient une fréquence de « oui » de 0,6. Si on se base sur cet échantillon pour en déduire que, dans cette population, une majorité est en faveur du projet de loi, quel est le risque d'erreur que l'on prend ?

Exercice 302. Dans une entreprise l'étude d'un dossier comporte deux volets : le temps, en heures, consacré à l'étude financière d'un dossier suit une loi de probabilité d'espérance 5 et d'écart-type 2, et celui consacré à l'étude administrative suit une loi d'espérance 3 et d'écart-type 1. On note X la variable aléatoire égale au temps total consacré à l'étude d'un dossier. On admet que les temps d'étude sont indépendants.

1. Déterminez l'espérance et l'écart-type de X.
2. Soit T la variable aléatoire qui à un échantillon aléatoire de 100 dossiers de l'entreprise, associe le temps passé à étudier l'ensemble de ces dossiers. Déterminez l'espérance et la variance de T.
3. (a) Écrivez l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev relative à la variable aléatoire T.
   (b) Montrez que la probabilité que le temps d'étude de cet échantillon de dossiers soit strictement compris entre 700 et 900 heures est d'au moins 95 %.

Exercice 303. *Les parties* A *et* B *sont indépendantes.*

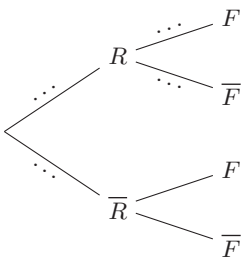
Partie A Une société de vente en ligne procède à une étude du niveau de fidélité de ses clients. Elle définit pour cela comme « régulier » un client qui a fait des achats chaque année depuis trois ans. Elle constate que 60 % de ses clients sont des clients réguliers, et que parmi eux, 47 % ont acheté la carte de fidélité. Par ailleurs, parmi l'ensemble de tous les clients de la société, 38 % ont acheté la carte de fidélité.

On interroge au hasard un client et on considère les évènements suivants :

- R : « le client est un client régulier » ;
- F : « le client a acheté la carte de fidélité ».

Pour un évènement E quelconque, on note $\overline{E}$ son évènement contraire et $P(E)$ sa probabilité.

1.
   (a) Reproduire l'arbre ci-contre et compléter les pointillés.
   (b) Calculer la probabilité que le client interrogé soit un client régulier et qu'il ait acheté la carte de fidélité.
   (c) Déterminer la probabilité que le client ait acheté la carte de fidélité sachant que ce n'est pas un client régulier.
   (d) Le directeur du service des ventes affirme que parmi les clients qui ont acheté la carte de fidélité, plus de 80 % sont des clients réguliers. Cette affirmation est-elle exacte ? Justifier.



2. On choisit un échantillon de 20 clients de la société sélectionnés de manière indépendante. On suppose que ce choix s'assimile à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 20 clients associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux. On rappelle que $P(F) = 0{,}38$. Les valeurs des probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3} près.
   (a) Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ? Justifier.
   (b) Déterminer la probabilité qu'au moins 5 clients aient acheté la carte de fidélité dans un échantillon de 20.

Partie B La société demande à un institut de sondage de faire une enquête sur le profil de ses clients réguliers. L'institut a élaboré un questionnaire en ligne constitué d'un nombre variable de questions. On choisit au hasard un échantillon de 1 000 clients réguliers, à qui le questionnaire est proposé. On considère que ces 1 000 clients répondent.

- Pour les remercier, la société offre un bon d'achat à chacun des clients de l'échantillon. Le montant de ce bon d'achat dépend du nombre de questions posées au client.
- La société souhaite récompenser particulièrement les clients de l'échantillon qui ont acheté une carte de fidélité et, en plus du bon d'achat, offre à chacun d'eux une prime d'un montant de 50 euros versée sur la carte de fidélité.

On note Y_1 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le total, en euros, des montants du bon d'achat des 1000 clients. On admet que son espérance $E(Y_1)$ est égale à 30 000 et que sa variance $V(Y_1)$ est égale à 100 000. On note X_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux, et on note Y_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients, associe le total, en euros, des montants de la prime de fidélité versée. On admet que X_2 suit la loi binomiale de paramètres 1 000 et 0,47 et que $Y_2 = 50X_2$.

1. Calculer l'espérance $E(X_2)$ de la variable X_2 et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

On note $Y = Y_1 + Y_2$ la variable aléatoire égale au total général, en euros, des montants offerts (bon d'achat et prime de fidélité) aux 1 000 clients. On admet que les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes. On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y}{1\,000}$.

2. Préciser ce que modélise la variable Z dans le contexte de l'exercice. Vérifier que son espérance $E(Z)$ est égale à 53,5 et que sa variance $V(Z)$ est égale à 0,722 75.
3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, vérifier que la probabilité que Z soit strictement compris entre 51,7 euros et 55,3 euros est supérieure à 0,75.

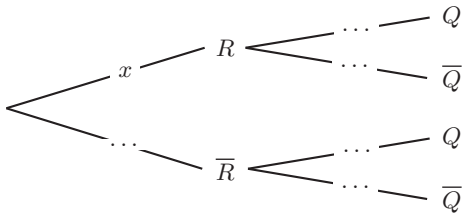
Exercice 304. La directrice d'une école souhaite réaliser une étude auprès des étudiants qui ont passé l'examen de fin d'étude, pour analyser la façon dont ils pensent avoir réussi cet examen. Pour cette étude, on demande aux étudiants à l'issue de l'examen de répondre individuellement à la question : « Pensez-vous avoir réussi l'examen ? ». Seules les réponses « oui » ou « non » sont possibles, et on observe que 91,7 % des étudiants interrogés ont répondu « oui ». Suite à la publication des résultats à l'examen, on découvre que :

— 65 % des étudiants ayant échoué ont répondu « non » ;
— 98 % des étudiants ayant réussi ont répondu « oui ».

On interroge au hasard un étudiant qui a passé l'examen. On note R l'évènement « l'étudiant a réussi l'examen » et Q l'évènement « l'étudiant a répondu « oui » à la question ». Pour un évènement A quelconque, on note $P(A)$ sa probabilité et $\overline{A}$ son évènement contraire. Dans tout l'exercice, les probabilités sont, si besoin, arrondies à $\mathbf{10^{-3}}$ près.

1. Préciser les valeurs des probabilités $P(Q)$ et $P_{\overline{R}}\left(\overline{Q}\right)$.

2. On note x la probabilité que l'étudiant interrogé ait réussi l'examen.
   (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



   (b) Montrer que $x = 0{,}9$.
3. L'étudiant interrogé a répondu « oui » à la question. Quelle est la probabilité qu'il ait réussi l'examen ?
4. La note obtenue par un étudiant interrogé au hasard est un nombre entier entre 0 et 20 . On suppose qu'elle est modélisée par une variable aléatoire N qui suit la loi binomiale de paramètres $(20\ ;\ 0{,}615)$. La directrice souhaite attribuer une récompense aux étudiants ayant obtenu les meilleurs résultats. À partir de quelle note doit-elle attribuer les récompenses pour que 65 % des étudiants soient récompensés ?
5. On interroge au hasard dix étudiants. Les variables aléatoires $N_1, N_2, \dots, N_{10}$ modélisent la note sur 20 obtenue à l'examen par chacun d'entre eux. On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres $(20\ ;\ 0{,}615)$. Soit S la variable définie par $S = N_1 + N_2 + \cdots + N_{10}$. Calculer l'espérance $E(S)$ et la variance $V(S)$ de la variable aléatoire S.
6. On considère la variable aléatoire $M = \dfrac{S}{10}$.
   (a) Que modélise cette variable aléatoire M dans le contexte de l'exercice ?
   (b) Justifier que $E(M) = 12{,}3$ et $V(M) = 0{,}473\,55$.
   (c) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier l'affirmation : « La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80 % ».

Exercice 305. *Les deux parties sont indépendantes.*

Un laboratoire fabrique un médicament conditionné sous forme de cachets.

Partie A

Un contrôle de qualité, portant sur la masse des cachets, a montré que 2 % des cachets ont une masse non conforme. Ces cachets sont conditionnés par boîtes de 100 choisis au hasard dans la chaîne de production. On admet que la conformité d'un cachet est indépendante de celle des autres. On note N la variable aléatoire qui à chaque boîte de 100 cachets associe le nombre de cachets non conformes dans cette boîte.

1. Justifier que la variable aléatoire N suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer l'espérance de N et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
3. *On arrondira les résultats à* 10^{-3} *près.*
   (a) Calculer la probabilité qu'une boîte contienne exactement trois cachets non conformes.
   (b) Calculer la probabilité qu'une boîte contienne au moins 95 cachets conformes.
4. Le directeur du laboratoire veut modifier le nombre de cachets par boîte pour pouvoir affirmer : « La probabilité qu'une boîte ne contienne que des cachets conformes est supérieure à 0,5 ». Combien de cachets une boîte doit-elle contenir au maximum pour respecter ce critère ? Justifier.

Partie B

On admet que les masses des cachets sont indépendantes les unes des autres. On prélève 100 cachets et on note M_i, pour i entier naturel compris entre 1 et 100, la variable aléatoire qui donne la masse en gramme du i-ème cachet prélevé. On considère la variable aléatoire S définie par : $S = M_1 + M_2 + \ldots + M_{100}$. On admet que les variables aléatoires M_1, M_2, ..., M_{100} suivent la même loi de probabilité d'espérance $\mu = 2$ et d'écart-type σ.

1. Déterminer $E(S)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
2. On note s l'écart type de la variable aléatoire S. Montrer que : $s = 10\sigma$.
3. On souhaite que la masse totale, en gramme, des comprimés contenus dans une boîte soit strictement comprise entre 199 et 201 avec une probabilité au moins égale à 0,9.
   (a) Montrer que cette condition est équivalente à : $P\left(\left|S - 200\right| \geqslant 1\right) \leqslant 0{,}1$.
   (b) En déduire la valeur maximale de σ qui permet, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, d'assurer cette condition.

Exercice 306. Une concession automobile vend deux sortes de véhicules :

- 60 % sont des véhicules tout-électrique ;
- 40 % sont des véhicules hybrides rechargeables.

75 % des acheteurs de véhicules tout-électrique et 52 % des acheteurs de véhicules hybrides ont la possibilité matérielle d'installer une borne de recharge à domicile. On choisit un acheteur au hasard et on considère les évènements suivants :

- E : « l'acheteur choisit un véhicule tout-électrique » ;
- B : « l'acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile ».

Dans l'ensemble de l'exercice, les probabilités seront arrondies au millième si nécessaire.

1. Calculer la probabilité que l'acheteur choisisse un véhicule tout-électrique et qu'il ait la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile. *On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.*
2. Démontrer que $P(B) = 0{,}658$.
3. Un acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile. Quelle est la probabilité qu'il choisisse un véhicule tout-électrique ?
4. On choisit un échantillon de 20 acheteurs. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre total d'acheteurs pouvant installer une borne de recharge à leur domicile parmi l'échantillon de 20 acheteurs.
   (a) Déterminer la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.
   (b) Calculer $P(X = 8)$.
   (c) Calculer la probabilité qu'au moins 10 acheteurs puissent installer une borne de recharge.
   (d) Calculer l'espérance de X.
   (e) La directrice de la concession décide d'offrir l'installation de la borne de recharge aux acheteurs ayant la possibilité d'en installer une à leur domicile. Cette installation coûte 1 200 €. En moyenne, quelle somme doit-elle prévoir d'engager pour cette offre lors de la vente de 20 véhicules ?

Exercice 307. On lance n fois un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Comment suffit-il de choisir n pour que la probabilité d'obtenir un nombre de fois la face marquée 6 inférieure ou égale à $\frac{n}{3}$ soit au moins égale à 0,5.

Exercice 308. On souhaite estimer l'équilibre d'une pièce. On note p la probabilité (inconnue) que la pièce tombe sur pile. On lance n fois la pièce et on note S_n le nombre de lancers ayant donné pile. À partir de combien de lancers peut-on supposer que $\frac{S_n}{n}$ est une approximation de p à 0,01 près avec une probabilité supérieure à 95 % ?

Exercice 309. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes avec X_n suivant une loi de Bernoulli de paramètre p_n. Montrez que pour tout $\varepsilon > 0$: $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n p_i\right| < \varepsilon\right) = 1$.

V Corrections.

Exercice 289. Soit $c \in]\!]0,n[\![$. $X-1$ est bien positive donc d'après l'inégalité de Markov $\mathbb{P}(X-1 \geqslant c-1) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X-1)}{c-1} \iff \mathbb{P}(X \geqslant c) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)-1}{c-1}$. $\mathbb{P}(n-X-1 \geqslant n-c) \leqslant \frac{\mathbb{E}(n-X-1)}{n-c} \iff \mathbb{P}(X \leqslant c-1) \leqslant \frac{n-1-\mathbb{E}(X)}{n-c} \iff 1-\mathbb{P}(X > c-1) \leqslant \frac{n+1-\mathbb{E}(X)}{n-c} \iff \mathbb{P}(X \geqslant c) \geqslant \frac{\mathbb{E}(X)-c-1}{n-c}$.

Exercice 290.

1. $X \hookrightarrow \mathscr{B}(3600;0{,}5)$ donc $\mu = 3600 \times 0{,}5 = 1800$ et $V = np(1-p) = 900$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(|X-1800| \geqslant x) \leqslant \frac{np(1-p)}{x^2}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(|X-1800| \geqslant 1800) \leqslant \frac{900}{x^2}$.
2. $\mathbb{P}(1600 < X < 2000) = \mathbb{P}(|X-1800| < 200) = 1-\mathbb{P}(|X-1800| \geqslant 200)$ or $\mathbb{P}(|X-1800| \geqslant 200) \leqslant \frac{900}{200^2} = 0{,}0225$ donc $1-\mathbb{P}(|X-1800| \geqslant 200) \geqslant 1-0{,}0225 = 0{,}9775$.

Exercice 291.

1. $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)| \geqslant x) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{x^2} \iff \mathbb{P}(|X-16| \geqslant x) \leqslant \frac{4}{x^2}$.
2. $X \in [\![12,24]\!] \iff 12 \leqslant X \leqslant 20 \iff -4 \leqslant X-16 \leqslant 4 \iff |X-16| \leqslant 4$. $\mathbb{P}(|X-16| \leqslant 4) = 1-\mathbb{P}(|X-16| \geqslant 5) \geqslant 1-\frac{4}{5^2}$.

Exercice 292. On considère une variable aléatoire X d'espérance μ et d'écart-type σ.

1. $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)| \geqslant x) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{x^2} \iff \mathbb{P}(|x-\mu| \geqslant x) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{x^2}$.
2. $\mathbb{P}(|X-\mu| < 15) \geqslant 0{,}96 \iff 1-\mathbb{P}(|X-\mu| \geqslant 15) \geqslant 0{,}96$. Or $\mathbb{P}(|X-\mu| \geqslant 15) \leqslant \frac{\sigma}{15^2}$ donc $1-\mathbb{P}(|X-\mu| \geqslant \mu) \geqslant 1-\frac{\sigma}{15^2}$. Il suffit que $1-\frac{\sigma}{15^2} \geqslant 0{,}96$ *i.e.* $\sigma \leqslant 15^2(1-0{,}96)$.

Exercice 293.

1. (a) $\mathbb{P}(|X-50| \geqslant 25) = 1-\mathbb{P}(|X-50| \leqslant 24) = 1-\mathbb{P}(-24 \leqslant X-50 \leqslant 24) = 1-\mathbb{P}(26 \leqslant X \leqslant 74) \geqslant 1-\mathbb{P}(0 \leqslant X \leqslant 74) = 1-\mathbb{P}(X \leqslant 74) = \mathbb{P}(X \geqslant 75)$.
   (b) $\mathbb{P}(X \geqslant 75) \leqslant \mathbb{P}(|X-50| \geqslant 25) \leqslant \frac{25}{25^2} = 0{,}04$.
2. $\{40 < X < 60\} = \{-10 < X-50 < 10\} = \{|X-50| < 10\} = \overline{\{|X-50| \geqslant 10\}}$. Or $\mathbb{P}(|X-50| \geqslant 10) \leqslant \frac{25}{10^2} = 0{,}25$ donc $\mathbb{P}(40 < X < 60) \geqslant 1-0{,}25 = 0{,}75$.

Exercice 294.

1. (a) $120 + 0{,}07 \times 100 + 0{,}02 \times 100 = 129$
   (b) Elle est conforme.
2. Les v.a.r. étant indépendantes : $0{,}01 \times 100^2 + 0{,}001 \times 100^2 = 110$
3. $\mathbb{P}(A > 129{,}42) \leqslant \mathbb{P}(|A| \geqslant 129{,}42) \leqslant \frac{110}{129.42^2} \approx 0{,}006567$ tonnes.

Exercice 295.

1.
2. $\mathbb{P}(0{,}35 < M_n < 0{,}45) = \mathbb{P}(-0{,}05 < M_n - 0{,}4 < 0{,}5) = \mathbb{P}(|M_n - 0{,}4) < 0{,}05) = 1-\mathbb{P}(|M_n-0{,}4| \geqslant 0{,}05)$. Donc $\mathbb{P}(0{,}35 < M_n < 0{,}45) > 0{,}95 \iff \mathbb{P}(|M_n-0{,}4| \geqslant 0{,}05) < 0{,}05$ or $\mathbb{P}(|M_n-0{,}4| \geqslant 0{,}05) \leqslant \frac{0{,}24}{n0{,}05^2}$ donc il suffit que $\frac{0{,}24}{n0{,}05^2} < 0{,}05$ et donc que $n > 1920$.

Exercice 296.

1. (a) Tirer une jeton est une épreuve de Bernoulli $\mathscr{B}(0{,}4)$. Les tirages se faisant de façon indépendante et à l'identique la variable Xn, somme de variables indépendantes suivant la même loi de Bernoulli, suit une loi binomiale : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(10;0{,}4)$.
   (b) $X \hookrightarrow \mathscr{B}(10;0{,}4)$ donc $\mathbb{E}(X) = np = 10 \times ,4 = 4$.
   (c) $X \hookrightarrow \mathscr{B}(10;0{,}4)$ donc $\mathbb{V}(X) = np(1-p) = 10 \times 0{,}4(1-0{,}4) = 2{,}4$.
2. Montrez en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que $\mathbb{P}(|X-4| \geqslant 2) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{2^2} = \frac{2{,}4}{4} = 0{,}6$.
3. (a) $\overline{\{|X-4| \geqslant 2\}} = \{|X-4| < 2\}$.
   (b) $\mathbb{P}(|X-4| < 2) \geqslant 1-0{,}4$.

Exercice 297.

1. $\mathbb{E}(M_{10000}) = \mathbb{E}(T) = 50$ et $\mathbb{V}(M_{10000}) = \frac{1}{10000}\mathbb{V}(T) = \frac{1}{10000} \times 2 = 0{,}0002$.
2. $\mathbb{P}(|X - 50| \geqslant 0{,}1) \leqslant \frac{0{,}0002}{0{,}1^2} = 0{,}02$.

Exercice 298.

1. $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{6}\right)$ donc $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6}$ et $\mathbb{V}(X)\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$, $\mathbb{P}\left(\left|M_n - \frac{1}{6}\right| \geqslant x\right) \leqslant \frac{\frac{1}{6n}}{x^2} = \frac{1}{6nx^2}$.
2. On souhaite n tel que $\mathbb{P}\left(\left|M_n - \frac{1}{6}\right| \geqslant \frac{1}{100}\right) \leqslant 0{,}95$. Pour cela il suffit que $\frac{1}{6n\left(\frac{1}{100}\right)^2} \leqslant 0{,}95$. Or $\frac{1}{6n\left(\frac{1}{100}\right)^2} \leqslant 0{,}95 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{1}{6\times 0{,}95\times 10^{-4}}$ et $\frac{1}{6\times 0{,}95\times 10^{-4}} \approx 1754{,}4$ au dixième par excès donc il suffit de $n = 1755$ lancers.

Exercice 299. Puisque $\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(|M_k - 5| \geqslant 2) = 0$ il existe un rang n tel que $\mathbb{P}(|M_n - 5| \geqslant 2) \leqslant 10^{-26}$ (et d'ailleurs on peut faire en sorte que tous les termes qui suivent vérifient la même inégalité).

Exercice 300.

1. $p_m = \frac{1}{1+1{,}05} \approx 0{,}488$ à 10^{-3} près, et $p_c = \frac{1}{1+1{,}13} \approx 0{,}469$ à 10^{-3} près.
2. (a) Choisir une personne et enregistrer 1 si une femme et 0 sinon est une épreuve de Bernoulli en répétant de façon indépendante on obtient un schéma : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(1{,}3; 0{,}488)$ suit une loi binomiale et précisez-en les paramètres.
   (b) F représente la proportion de femmes parmi les $1{,}3 \times 10^9$ personnes.
   (c) $\mathbb{E}(F) = \frac{1{,}3\times 10^9 \times 0{,}488}{1{,}3\times 10^9} = 0{,}488$ et $\mathbb{V}(F) = \frac{1{,}3\times 10^9 \times 0{,}488\times(1-0{,}488)}{(1{,}3\times 10^9)^2} \approx 0{,}192 \times 10^{-9}$.
3. (a) $\mathbb{P}\left(\|F - p_m\| > 10^{-2}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\|F - 0{,}488\| \leqslant 10^{-2}\right) \geqslant 1 - \frac{\mathbb{V}(F)}{(10^{-2})^2} \approx 0{,}999998079$.
   (b) $\mathbb{P}(\|F - p_m\| \leqslant |p_c - p_m|) \leqslant \frac{0{,}192\times 10^{-9}}{|p_c - p_m|^2} \approx 5{,}32 \times 10^{-7}$ à 10^{-9} près par excès.
   (c) La proportion en Chine est anormalement différente de celle du reste de la planète.

Exercice 301.

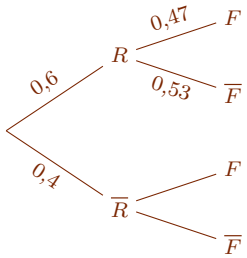
1. (a) $A \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ donc $S_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.
   (b) $\mathbb{E}(S_n) = n\mathbb{E}(A) = np$ et $\mathbb{V}(S_n) = n\mathbb{V}(A) = np(1-p)$ du fait de l'indépendance des épreuves, et donc $\mathbb{E}(F_n) = \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(S_n) = p$ par linéarité de $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}(F_n) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}(S_n) = \frac{p(1-p)}{n}$.
2. $\mathbb{P}(|F_n - p| < \delta) = 1 - \mathbb{P}(|F_n - p| \geqslant \delta) \geqslant 1 - \frac{\frac{p(1-p)}{n}}{\delta^2} = 1 - \frac{p(1-p)}{n\delta^2}$.
3. (a) $f(p) = p(1-p) = -p^2 + p$. $f'(p) = -2p + 1$ et $-2p + 1 > 0 \Leftrightarrow p < \frac{1}{2}$ donc f est strictement croissante sur $[0{,}2; 0{,}5]$ et strictement décroissante sur $[0{,}5; 0{,}8]$. Or $f(0{,}2) = f(0{,}8) = 0{,}16$ donc : $\forall p \in [0{,}2; 0{,}8]$, $p(1-p) \geqslant 0{,}16$.
   (b) $\mathbb{P}(|F_n - p| < \delta) \geqslant 1 - \frac{p(1-p)}{n\delta^2}$ en particulier : $\mathbb{P}(|F_n - p| < 0{,}1) \geqslant 1 - \frac{100p(1-p)}{n}$. Or $1 - \frac{100p(1-p)}{n} \geqslant 0{,}95 \Leftrightarrow \frac{100p(1-p)}{n} \leqslant 0{,}05 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{100p(1-p)}{0{,}05}$ donc, d'après la question précédente $n \geqslant \frac{100\times 0{,}16}{0{,}05} = 320$.
4. La majorité correspond à 0,5 et le résultat du sondage est de 0,6 donc il on souhaite que l'erreur commise ne dépasse pas $0{,}6 - 0{,}5 = 0{,}1$. En utilisant la question précédente on prend un risque de moins de 5 %.

Exercice 302.

1. Par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(F) + \mathbb{E}(A) = 5 + 3 = 8$. Les variables F et A étant indépendantes : $\mathbb{V}(F + A) = \mathbb{V}(F) + \mathbb{V}(A) = 2 + 1 = 3$.
2. Puisqu'il s'agit d'un échantillon (indépendance) : $\mathbb{E}(T) = 100\mathbb{E}(X) = 800$ et $\mathbb{V}(T) = 100\mathbb{V}(X) = 300$.
3. (a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(|T - 800| \geqslant x) \leqslant \frac{300}{x^2}$.
   (b) $\mathbb{P}(700 < T < 900) = 1 - \mathbb{P}(|T - 800| \geqslant 100) \geqslant 1 - \frac{300}{100^2} = 0{,}97$.

Exercice 303.

1. (a)



(b) $\mathbb{P}(R) > 0$ donc, d'après la formule des probabilités composées : $\mathbb{P}(R \cap F) = \mathbb{R}\mathbb{P}_R(F) = 0{,}6 \times 0{,}47 = 0{,}282$.

(c) $\{R, \overline{R}\}$ est un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales : $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(R \cap F) + \mathbb{P}(\overline{R} \cap F)$. Autrement dit : $0{,}38 = 0{,}282 + 0{,}4\mathbb{P}_{\overline{R}}(F)$ et donc $\mathbb{P}_{\overline{R}}(F) = 0{,}245$.

(d) Par définition de la probabilité conditionnelle : $\mathbb{P}_F(R) = \frac{\mathbb{P}(F \cap R)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{0{,}282}{0{,}38} \approx 0{,}741$. L'affirmation est inexacte.

2. (a) $X \hookrightarrow \mathscr{B}(20; 0{,}38)$. Épreuve de Bernoulli de succès « le client a une carte de fidélité » et de probabilité $p = 0{,}38$. Cette épreuve est répétée à l'identique et de façon indépendante $n = 20$ fois. X compte le nombre de cartes de fidélités.

(b) $\mathbb{P}(X \geqslant 5) = 1 - \mathbb{P}(X < 5) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 4) \approx 0{,}9273883422727993$.

Partie B

1. $E(X_2) = np = 1000 \times 0{,}47 = 470$. La société devra payer, en moyenne, 470 € sur les cartes de fidélités pour chaque échantillon de 1000 personnes.

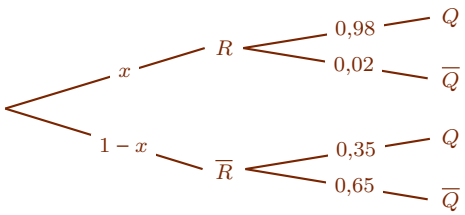
2. Z est le coût total moyen pour l'entreprise par personne de l'échantillon. $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}\left(\frac{Y_1+Y_2}{1000}\right) = \frac{1}{1000}\left(\mathbb{E}(Y_1) + \mathbb{E}(Y_2)\right) = \frac{1}{1000}\left(30000 + 50\mathbb{E}(X_2)\right) = \frac{30000+50\times470}{1000} = 53{,}5$ et $\mathbb{V}(Z) = \frac{\mathbb{V}(Y_1)+50^2\mathbb{V}(X_2)}{1000^2} = \frac{100000+50^2\times1000\times0{,}47\times(1-0{,}47)}{1000^2} = 0{,}72275$.

3. $\mathbb{P}(51{,}7 < Z < 55{,}3) = 1 - \mathbb{P}(|S - 53{,}5| \geqslant 1{,}8) \geqslant 1 - \frac{0{,}72275}{1{,}8^2} \approx 0{,}776929012345678$ à 10^{-15} près par défaut.

Exercice 304.

1. $P(Q) = 0{,}917$ et $P_{\overline{R}}\left(\overline{Q}\right) = 0{,}65$.

2. (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



(b) $\{R, \overline{R}\}$ est un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales : $\mathbb{P}(Q) = \mathbb{P}(R \cap Q) + \mathbb{P}(\overline{R} \cap Q)$. Cette dernière égalité équivaut successivement à : $\mathbb{P}(Q) = \mathbb{P}(R)\mathbb{P}_R(Q) + \mathbb{P}(\overline{R})\mathbb{P}_{\overline{R}}(Q) \iff 0{,}917 = 0{,}98x + 0{,}35(1-x) \iff x = \frac{0{,}917-0{,}35}{0{,}98-0{,}35} \iff x = 0{,}9$

3. $\mathbb{P}_Q(R) = \frac{\mathbb{P}(Q \cap R)}{\mathbb{P}(Q)} = \frac{0{,}9\times0{,}98}{0{,}917} \approx 0{,}962$.

4. $\mathbb{P}(X \geqslant k) \geqslant 0{,}65 \iff 1 - \mathbb{P}X \leqslant k-1) \geqslant 0{,}65$. Avec un programme Python ou autre $k = 10$.

5. $E(S) = \mathbb{E}(N_1 + \cdots + N_{10}) = \mathbb{E}(N_1) + \cdots + \mathbb{E}(N_{10}) = 1020 \times 0{,}615 = 123$ et $V(S)\mathbb{V}(N_1 + \cdots + N_{10}) = \mathbb{V}(N_1) + \cdots + \mathbb{V}(N_{10}) = 20 \times 20 \times 0{,}615(1 - 0{,}615) = 47{,}355$.

6. On considère la variable aléatoire $M = \dfrac{S}{10}$.

(a) M est la note moyenne obtenue par un groupe de 10 élèves.
(b) $E(M) = \mathbb{E}(N_1) = 20 * 0{,}615 = 12{,}3$ et $V(M) = \frac{1}{10}\mathbb{V}(N_1) = \frac{1}{10} \times 20 * 0{,}615(1 - 0{,}615) = 0{,}473\,55$.
(c) $\mathbb{P}(10{,}3 < M < 14{,}3) = 1 - \mathbb{P}(|M - 12{,}3| \geqslant 2) \geqslant 1 - \frac{0{,}47355}{2^2} = 0{,}8816125$.

Exercice 305.

Partie A

1. $N \hookrightarrow \mathscr{B}(100; 0{,}02)$.
2. $\mathbb{E}(N) = 100 \times 0{,}02 = 2$ en moyenne dans une boîte de 100 cachets 2 d'entre eux son non conformes.
3. (a) $\mathbb{P}(X = 3) \approx 0{,}18227594104651598$.
   (b) $\mathbb{P}(X \leqslant 5) \approx 0{,}984516359358219$.
4. $\mathbb{P}(X = 0) \geqslant 0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}98^n \geqslant 0{,}5 \Leftrightarrow n \leqslant \frac{ln(0{,}5)}{\ln(0{,}98)}$ et $\frac{ln(0{,}5)}{\ln(0{,}98)} \approx 34{,}309618491520645$.

Partie B

1. $E(S) = 200$ la masse moyenne d'un paquet de cachets est 200 g.
2. $s^2 = \mathbb{V}(M_1 + \cdots + M_{100}) = 100\mathbb{V}(M_1) = (10\sigma)^2$.
3. (a) $\mathbb{P}(199 < S < 201) \geqslant 0{,}9 \Leftrightarrow \mathbb{P}(|X - 200| < 1) \geqslant 0{,}9 \Leftrightarrow 1 - \mathbb{P}(|X - 200| \geqslant 1) \geqslant 0{,}9 \Leftrightarrow P\left(\left|S - 200\right| \geqslant 1\right) \leqslant 0{,}1$.
   (b) $P\left(\left|S - 200\right| \geqslant 1\right) \leqslant \frac{100\sigma^2}{1^2} = 100\sigma^2$. Il faut donc que $100\sigma^2 \leqslant 0{,}1 \Leftrightarrow \sigma \leqslant \sqrt{\frac{0{,}1}{100}}$ et $\sigma \approx 0{,}03162277660168379$.

Exercice 306.

1. Calculer la probabilité que l'acheteur choisisse un véhicule tout-électrique et qu'il ait la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile. *On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.*
2. Démontrer que $P(B) = 0{,}658$.
3. Un acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile. Quelle est la probabilité qu'il choisisse un véhicule tout-électrique ?
4. On choisit un échantillon de 20 acheteurs. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre total d'acheteurs pouvant installer une borne de recharge à leur domicile parmi l'échantillon de 20 acheteurs.
   (a) Déterminer la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.
   (b) Calculer $P(X = 8)$.
   (c) Calculer la probabilité qu'au moins 10 acheteurs puissent installer une borne de recharge.
   (d) Calculer l'espérance de X.
   (e) La directrice de la concession décide d'offrir l'installation de la borne de recharge aux acheteurs ayant la possibilité d'en installer une à leur domicile. Cette installation coûte 1 200 €. En moyenne, quelle somme doit-elle prévoir d'engager pour cette offre lors de la vente de 20 véhicules ?

Exercice 307. $X_n \in \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{6}\right)$. $\mathbb{P}\left(X_n \leqslant \frac{n}{3}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X_n > \frac{n}{3}\right) = \mathbb{P}\left(X_n \leqslant \frac{n}{3}\right) \geqslant 1 -$.

Exercice 308. $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| < 0{,}01\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant 0{,}01\right) \geqslant 1 - \frac{\mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{0{,}01^2} = 1 - \frac{p(1-p)}{n10^{-4}}$. Il suffit donc que $1 - \frac{p(1-p)}{n10^{-4}} \geqslant 0{,}95$ équivaut à : $n \geqslant \frac{p(1-p)}{5}10^6$. On remarque que plus p s'éloigne de $\frac{1}{2}$

Exercice 309. Soit $\varepsilon > 0$.

Montons que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n p_i\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$.

Notons $Z_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$.

* Par linéarité de l'espérance $\mathbb{E}(Z_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n p_k$.
* $\mathbb{V}(Z_n) = \mathbb{V}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n)$ et, puisque les X_i sont indépendantes, $\mathbb{V}(Z_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n p_k(1 - p_k)$.
  $h(x) = x(1 - x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ donc h admet un maximum égale à $\frac{1}{4}$. Par conséquent $p_k \leqslant \frac{1}{4}$.
  On en déduit : $\mathbb{V}(Z_n) \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n \frac{1}{4} = \frac{1}{4n}$.
* D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $\mathbb{P}\left(\left|Z_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n p_k\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(Z_n)}{\varepsilon^2} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \times \frac{1}{4n}$. Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4\varepsilon^2 n} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|Z_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

Algorithmique.

15. Listes Python.

I Listes.

Une liste est une structure de données permettant de stocker plusieurs valeurs dans un ordre donné. Elle est délimitée par des crochets `[ ]` et ses éléments sont séparés par des virgules. Les listes sont liées à la notion mathématique d'ensemble, mais contrairement aux ensembles :

— l'ordre des éléments compte ;
— les doublons sont autorisés.

On retrouve la notion mathématique de liste qui est au programme de terminale.

Exemples.

1. Pour créer une liste appelée L on écrit : L = [2, 5, 8, 12].
2. Une liste peut contenir tout type de variable : ["a",b,2.4,7].
3. La liste vide existe : [ ].

Il est possible de vérifier si un élément appartient à une liste en évaluant le booléen a in L où a est l'élément est L la liste. On retrouve la notion d'appartenance d'un élément à un ensemble.

Exemples.

1. L'instruction : 3 in [0,3,6] renvoie la valeur : True.
2. L'instruction : 2 in ["a",2,3.6] renvoie la valeur : False.

Une fonction est très souvent utilisée avec les listes c'est celle déterminant la longueur (length en anglais) d'une liste : len(L) renvoie le nombre d'éléments de la liste L. Ceci sert tout particulièrement quand la liste est choisie par l'utilisateur du programme et que nous ne pouvons prévoir sa taille.

Exemples.

1. Si nous avons crée une liste en tapant : L=[4,5,8] et que nous tapons : len(L) nous obtenons : 3.

II Modifier une liste.

Les éléments d'une liste sont repérés par un indice commençant à zéro. Si L est une liste et i un nombre entier alors L[i] est l'élément d'indice i de la liste L.

Exemples.

1. Si M=[7,-2,3] alors M[0] est le nombre 7, M[1] est le nombre -2 et M[2] est le nombre 3. M[-1] ou M[3] renverront un message d'erreur.
2. À la suite des instructions L=[6,9] puis L[1]=5 alors la liste L est devenue [6,5]. Il est ainsi possible de modifier un élément d'une liste dont on connaît l'indice dans la liste.
3. L'indice de 5 dans la liste [3,4,2,5] est len([3,4,2,5])-1.

Il est possible de rassembler des listes avec le symbole d'addition +.

Exemples.

1. En faisant [2,5,a]+[2,4] on obtient la liste [2,5,a,2,4].
2. De même [8,2]+[3] crée la liste [8,2,3].

Pour ajouter un élément à la fin d'une liste il existe une *méthode*, c'est-à-dire une transformation, de la liste, notée append, qui permet d'ajouter un élément à la fin de la liste. Ainsi L.append(4) ajoute le nombre 4 à la fin de la liste L. Nous avons déjà vu comment ajouter un élément dans une liste mais cette méthode est à préférer car elle nécessite peu de calcul pour l'ordinateur.

Exemples.

1. Après l'instruction L=[8,7,6] puis L.append(3) la liste L contient [8,7,6,3].

Voici d'autres méthodes et instructions applicables à une liste :
L.pop() : supprime le dernier élément,
L.pop(1) : supprime l'élément d'indice 1,
L.remove(7) : supprime la première occurrence de 7,
L.insert(1, 5) : insère le nombre 5 à l'indice 1,
L.index(7) : donne l'indice du premier nombre 7 dans la liste,
L.sort() : range dans l'ordre croissant une liste de nombres,
del L[0] : supprime l'élément d'indice 0,
L[2 :14] : désigne la liste des éléments d'indices allant de 2 à 13.

III Générer une liste.

On écrit explicitement tous les éléments de la liste [a,b,c]. On parle d'une définition en extension. Comme on définit en extension un ensemble mathématique $\{a,b,c\}$ (mais dans un ensemble pas de répétition et pas d'ordre). C'est ce que nous avons fait depuis le début de cette leçon.

Il est possible de créer une liste par ajouts successifs des éléments. On part d'une liste vide (ou d'une liste déjà créée), puis on ajoute des éléments avec la méthode append.

Exemples.

1. Si on effectue les instructions suivantes :

```
L = []
L.append(3)
L.append(7)
```

on génère la liste L qui contient [3,7].

Parcours direct des éléments d'une liste L : for x in L.

Parcours par indices des éléments d'une liste : for i in range(len(L)).

Exemples.

1. Tableau de valeurs de la fonction carré.

```
L=[1,2,3,4,5,6]
carre=[] for x in L :
    carre=carre.append(x**2)
```

2. Si L désigne une liste de nombres définie au préalable voici comme afficher les cubes des nombres de la liste.

```
cube=[]
for k in range(len(L)) :
    cube=cube.append(L[k]**3)
```

Il est possible de définir une liste en compréhension à partir d'une expression et d'une condition logique : [expression for élément in liste if].

Exemples.

1. Pour générer la liste des entiers de 1 à 10 : [x for x in range(1,11)].
2. Pour générer les doubles d'entiers de 1 à 10 : [2*x for x in range(1,11)].
3. Pour générer les pairs de 0 à 20 : [k for k in range(21) if k%2==0].

IV Exercices.

Exercice 310. On considère la liste L définie en extension par : L = [3, 7, 2, 7, 9, 1].

1. Déterminer la longueur de la liste L.
2. Donner l'élément d'indice 2.
3. Quelle instruction permet d'ajouter l'élément 5 à la fin de la liste ?
4. Quelle est celle qui permet de supprimer la première occurrence de 7 ?

Exercice 311. On construit une liste L vide, puis on y ajoute successivement les entiers de 1 à 8.

1. Donner la liste obtenue après les ajouts successifs.
2. Supprimer l'élément d'indice 3.
3. Insérer le nombre 20 à l'indice 2.

Exercice 312. On définit la liste suivante en compréhension :
L = [2*k for k in range(0,10)].

1. Écrire explicitement la liste L.
2. Déterminer le plus grand élément de L. Quelle instruction faut-il taper pour l'obtenir ?
3. Déterminer le nombre d'éléments de L. Quelle instruction permet-elle d'obtenir cette longueur ?

Exercice 313. On considère la liste : L = [4, 9, 1, 6, 3]. On souhaite parcourir cette liste pour calculer la somme de ses éléments.

1. Écrire la suite des valeurs successives de la somme partielle lors du parcours de L. Donner la somme finale.
2. Donner les instructions permettant d'abord de parcourir toute la liste puis celle calculant les sommes partielles.

Exercice 314. On définit la liste : L = [n**2 for n in range(0,20) and n**2 $<$ 150].

1. Écrire explicitement la liste L.
2. Déterminer le plus grand entier n satisfaisant la condition.
3. Expliquer en quoi la condition n**2 $<$ 150 relève de la logique.

Exercice 315. Générer la liste des multiples de 3 entre 1 et 100 en compréhension.

Exercice 316. Écrire un programme qui compte le nombre d'éléments strictement positifs dans une liste.

Exercice 317. Créer une liste de 20 entiers aléatoires entre 1 et 50, puis afficher le maximum.

Exercice 318. À partir d'une liste de notes, supprimer toutes les notes inférieures à 10.

Exercice 319. Construire la liste des entiers de 1 à 50 qui sont multiples de 4.

Exercice 320. Écrire un programme qui calcule la somme des éléments d'une liste.

Exercice 321. À partir d'une liste de températures, créer une nouvelle liste contenant uniquement les valeurs supérieures à 25.

Exercice 322. Créer une liste de 15 entiers aléatoires entre 0 et 100, puis afficher la valeur maximale et son indice.

V Corrections.

Exercice 310.

1. L a une longueur de 6.
2. L'élément d'indice 2 est 2.
3. L.append(5)
4. L.remove(7)

Exercice 311.

1. [1,2,3,4,5,6,7,8].
2. [1,2,3,5,6,7,8].
3. [1,2,20,2,3,5,7,8].

Exercice 312.

1. L contient [0,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20].
2. Le plus grand élément est 20 et il faut écrire max(L).
3. L a pour longueur 11 et on l'obtient avec len(L).

Exercice 313.

1. 4, 4 + 9 = 13, 13 + 1 = 14, 14 + 6 = 20, 20 + 3 = 23. 23 est la somme finale.
2.
```
somme=0
for k in L :
    somme=somme+k
```

Exercice 314.

1. [0,1,4,9,16,25,36,49,64,81,100,121,144].
2. 12.
3. C'est un booléen une proposition qui peut être vraie ou fausse suivant les valeurs de n.

Exercice 315.

```
[x for x in range(101) if x% 3==0]
```

Exercice 316. Notons L la liste dont on doit compter les éléments strictement positifs.

```
compteur=0
for x in L :
    if x>0 :
        c=c+1
print(c)
```

Exercice 317.

```
import random
L=[random.randint(1,50) for x in range(20)]
print(max(L))
```

Exercice 318. Notons L la liste de notes.

```
for x in L :
    if x<10 :
        L.remove(x)
```

Exercice 319.

```
[x for x in range(51) if x% 4==0]
```

Exercice 320.

```
somme=0
for x in L :
    somme=somme+x
```

Exercice 321. Notons L la liste de notes.

```
temperature=L for x in temperature :
    if x<25 :
        temperature.remove(x)
```

Exercice 322.

```
import random
L=[random.randint(0,100) for x in range(15)]
print(max(L),L.index(max(L)))
```

Logique.

16. Raisonnement par récurrence.

I Logique : propositions, assertions.

Dans l'axiomatique classique, le raisonnement par récurrence est un théorème de logique. Cependant nous l'accepterons comme un axiome, un principe.

Une *proposition*, en mathématique, peut désigner un résultat toujours vrai (comme un théorème) ou une phrase (assertion) qui peut être soit vraie soit fausse. Dans la suite de ce chapitre nous l'utiliserons pour désigner une assertion.

Exemples.

1. La proposition « le carré de -3 est négatif » est fausse.
2. La proposition $\mathscr{P}$: « $\sqrt{2}$ est irrationnel » est vraie.
3. La négation de la proposition $\mathscr{P}$: « $x \geqslant 5$ » est $\overline{\mathscr{P}}$: « $x < 5$ ».

Certaines propositions sont des propriétés universelles, c'est-à-dire des propositions qui dépendent d'un élément x appartenant à un ensemble. Ce sont des phrases qui contiennent le plus souvent les expressions « quel que soit » ou « pour tout » ou le quantificateur universel $\forall$.

Pour démonter qu'une proposition universelle est fausse il suffit de trouver un contre-exemple.

Exemples.

1. La proposition $\mathscr{P}(x)$: « $\frac{1}{x} > \frac{1}{x^2}$ » est une proposition qui est vraie quel que soit $x \in]0;1[$.
2. « Pour tout $x \in]0;2[$, on a $\frac{1}{x} > \frac{1}{x^2}$ » est une proposition qui est fausse puisque, par exemple, pour $x = 1$, on a $\frac{1}{1} = \frac{1}{1^2}$.
3. L'assertion $\mathscr{P}(n)$: « $4^n - 1$ est un multiple de 3. » est vraie pour tout nombre entier naturel n. Cependant la démonstration n'est pour l'instant pas aisée.

Certaines proposition contiennent des implications (appelées aussi conditions nécessaires) le plus souvent sous la forme « si ..., alors ... ».

Exemples.

1. « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n est impair alors n^2 est impair. » est une assertion qui est vraie. Démontrons-le.
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Supposons que n est impair et démontrons qu'alors forcément n^2 est aussi impair.
   Puisque n est impair il peut s'écrire $n = 2k + 1$ où k est un certain entier.
   Donc : $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \times 2k^2 + 2 \times 2k + 1 = 2 \times (2k^2 + 2k) + 1$. Ainsi n^2 est de la forme $2p + 1$ où p est un nombre entier. Autrement dit n^2 est impair.
   Concluons : nous avons démontré que, quel que soit l'entier n, si n est impair, alors, nécessairement, n^2 est aussi impair.

II Le théorème du raisonnement par récurrence.

Le raisonnement par récurrence est un procédé qui permet de démontrer des propriétés universelles, $\mathscr{P}(n)$, qui dépendent d'entiers naturels n.

La montée de l'échelle. Si j'affirme : « si on met un pied sur un barreau de l'échelle, alors on met, obligatoirement, l'autre pied sur le barreau supérieur » alors, pour peu que l'on mette un pied sur le barreau d'en bas il faudra grimper toute l'échelle.

Théorème 9. Soit $\mathscr{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n. Si les deux assertions suivantes sont vraies

(i) $\mathscr{P}(0)$ est vraie,
(ii) quel que soit $n \in \mathbb{N}$, si $\mathscr{P}(n)$ est vraie alors, forcément, $\mathscr{P}(n+1)$ est aussi vraie,

alors les assertions $\mathscr{P}(n)$ sont vraies pour tous les entiers naturels n.

Remarques.

1. L'assertion (i) est appelée *l'initialisation*.
2. L'assertion (ii) est appelée *l'hérédité*.
3. L'initialisation commence avec $n = 0$ mais, comme pour les suites, il possible de commencer avec un autre rang.
4. Ce théorème, comme le théorème de Pythagore, est une implication. Pour le théorème de Pythagore il faut d'abord vérifier que ABC est rectangle en A pour pouvoir affirmer que l'égalité $BA^2 + AC^2 = BC^2$. De même pour utiliser le raisonnement par récurrence il faut vérifier que l'initialisation et l'hérédité sont vraies avant de pouvoir affirmer que toutes les assertions sont vraies.
5. L'assertion de l'hérédité contient à la fois une propriété universelle et une implication nous adopterons systématiquement la rédaction :
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   ...
   Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
6. Lorsqu'on écrit « Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie » on signifie que l'on admet que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Le fait que « $\mathscr{P}(n)$ est vraie » est appelée *l'hypothèse de récurrence*.
7. Le raisonnement par récurrence ne permet pas de trouver un nouveau résultat mais il permet de démontrer qu'une conjecture est vraie.

Exemples.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.
   Démontrons par récurrence que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$.
   * Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant 3$. Démontrons que $u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 3$.
     $f : x \mapsto \frac{1}{4}x + 2$ est une fonction affine dont le coefficient directeur est strictement supérieur à 0 donc f est croissante.
     De l'hypothèse de récurrence : $u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant 3$ et de la croissance de f nous déduisons : $f(u_{k+1}) \leqslant f(u_k) \leqslant f(3)$.
     Autrement dit : $u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant \frac{11}{4} \leqslant 3$.
   * Montrons que : $u_1 \leqslant u_0 \leqslant 3$.
     $u0 = 3$ et $u_1 = f(u_0) = f(3) = \frac{11}{4}$ donc $u_1 \leqslant u_0 \leqslant 3$.
   * Nous avons démontré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$.
2. Démontrer une propriété.
   Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $4^n - 1$ est divisible par trois ».
   Démontrons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ en raisonnant par récurrence.

* Initialisation. Il s'agit de démontrer que $\mathscr{P}(0)$ est vraie. Autrement dit que $4^0 - 1$ est divisible par 3.
  $4^0 - 1 = 0$ et $3 \times 0 = 0$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
* Hérédité.
  Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
  Nous devons donc démontrer que $4^{n+1} - 1$ est un multiple de 3.

$$4^{n+1} - 1 = 4 \times (4^n - 1) + 3$$

  D'après l'hypothèse de récurrence : $3 | 4^n - 1$.
  Autrement dit il est possible d'écrire : $4^n - 1 = 3 \times k$ où k est un nombre entier.
  Donc

$$\begin{aligned} 4^{n+1} - 1 &= 4 \times 3k + 3 \\ &= 3(4k+1) \end{aligned}$$

  Autrement dit $4^{n+1} - 1$ est divisible par 3.
  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Nous avons démontré en raisonnant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 4^n - 1 \text{ est divisible par } 3.}$$

3. Démontrer une formule. Ici la somme des entiers naturels jusqu'à n.
Soit $\mathscr{P}(n)$: « $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ ».
Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
* $0 = \frac{0 \times 1}{2}$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
* Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = n + 1 + \sum_{k=0}^{n} k$$

  D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k &= n + 1 + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{2(n+1) + n(n+1)}{2} \\ &= \frac{(2+n)(n+1)}{2} \end{aligned}$$

  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Nous avons démontré par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.}$$

4. Démontrer la formule explicite du terme terme général d'une suite.
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 8$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2}{5} u_n + 3$.

Nous souhaitons démontrer que $u_n = 3\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Notons $\mathscr{P}(n)$: « $u_n = 3\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5$ ».
Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

*

5. Démontrer qu'une suite définie par récurrence est croissante.
   Étudions la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.
6. Démontrer un encadrement.
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n}$.
   Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2 \leqslant u_n \leqslant 3$.
7. Démontrer une inégalité.
   Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $2n + 1 \leqslant 2^n$ » est vraie.
8. De la nécessité de l'initialisation.
   $\mathscr{P}(n)$: « $4^n + 1$ est divisible par 3 ».

   * Soit $n \in \mathbb{N}$.
     Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
     Par hypothèse de récurrence, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $4^n + 1 = 3k$ donc :

$$\begin{aligned} 4^{n+1} - 1 &= 4 \times (4^n + 1) - 4 + 1 \\ &= 4 \times 3k - 3 \\ &= 3(4k - 1) \end{aligned}$$

     Autrement dit $4^{n+1} + 1$ est divisible par 3.
   * $4^0 + 1 = 1$ et $3 \nmid 1$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est fausse.

   Nous remarquons que l'hérédité ne suffit pas à démontrer que toutes les propositions sont vraies.
   Nous pourrions même démontrer par l'absurde que $4^n + 1$ n'est jamais divisible par 3.
9. Inégalité de Bernoulli.
   Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{B}(n)$: « ♥ pour tout nombre $x \geqslant 0$, $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$. »

   * Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
     D'une part : $(1 + x)^0 = 1$
     d'autre part : $1 + 0 \times x = 1$,
     donc : $(1 + x)^0 \geqslant 1 + 0 \times x$.
     $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   * Soit $n \in \mathbb{N}$.
     Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
     Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
     D'après l'hypothèse de récurrence :

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$$

     Puisque $(1 + x) \geqslant 0$:

$$(1 + x)^{n+1} \geqslant (1 + x)(1 + nx)$$

     En développant le membre de droite :

$$(1 + x)^{n+1} \geqslant 1 + (n + 1)x + nx^2 \quad (1)$$

Or, puisque $nx^2 \geqslant 0$,

$$1 + (n+1)x + nx^2 \geqslant 1 + (n+1)x \quad (2)$$

donc, par transitivité entre (1) et (2) :

$$(1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)x$$

Autrement dit $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

* Nous avons démontré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ (1 = x)^n \geqslant 1 + nx.}$$

Exercice 323.

a) Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $p_0 = 1$ et $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}4$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrez que, pour tout entier naturel n, $p_n \geqslant 0{,}8$.

b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0{,}9u_n - 0{,}3$. Démontrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 0{,}9^n - 3$.

c) Soient f une fonction définie et strictement croissante sur $]-1{,}5, +\infty[$. On note $\alpha \geqslant 0{,}1$ un point fixe de f, autrement dit $f(\alpha) = \alpha$. On pose $u_0 = 0$ et $u_1 = 0{,}1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

d) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 3$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 1{,}3$. Démontrez que $u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^n$.

e) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite définie par : $v_0 = 0{,}1$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 1{,}6v_n - 1{,}6v_n^2$. On considère $f : x \mapsto 1{,}6x - 1{,}6x^2$. Étudiez la monotonie de f sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ puis démontrez par récurrence que $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

f) Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $p_1 = 1$ $p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}6$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrez que, pour tout entier naturel n, $p_n = 0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}2^{n-1}$.

g) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $v_0 = 6 \times 10^{21}$ et, pour tout nombre entier naturel n, $v_{n+1} = 0{,}995v_n + 1{,}5 \times 10^{19}$. Démontrez que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$.

h) On définie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{11}{u_n}\right)$. Après voir démontré que $f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{11}{x}\right)$ est croissante sur $[\sqrt{11}, +\infty[$, démontrez que $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11}$ pour tout entier naturel n.

i) On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $a_0 = 1700$ et $a_{n+1} = 0{,}75a_n + 300$. Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1700$.

j) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{6u_n+2}{u_n+5}$. Montrez que la fonction $f : x \mapsto \frac{6x+2}{x+5}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Déduisez-en que pour tout entier naturel n, $u_n > 2$.

k) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3$. Démontrez que $u_n \geqslant n + 1$.

l) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{-u_n-4}{u_n+3}$. Démontrez que la fonction $f : x \mapsto \frac{-x-4}{x+3}$ est strictement croissante sur $]-3, +\infty[$ puis que pour tout entier naturel n, $-2 < u_{n+1} \leqslant u_n$.

m) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{\mathrm{e}} \\ u_{n+1} = \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1 + \frac{1}{n}\right)u_n, \text{ pour tout entier } n \geqslant 1 \end{cases}$.
Montrez que pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \frac{n}{\mathrm{e}^n}$.

n) On étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0{,}3$ et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n(1-u_n)$. Démontrez que la fonction $f : x \mapsto 2x(1-x)$ est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ puis montrez que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

o) Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6$. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2n$.

III Récurrence double.

Théorème 10. Soit $\mathscr{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n. Si les deux assertions suivantes sont vraies

(i) $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies,

(ii) quel que soit $n \in \mathbb{N}$, si $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies alors, $\mathscr{P}(n+2)$ est aussi vraie,

alors les assertions $\mathscr{P}(n)$ sont vraies pour tous les entiers naturels n.

Remarques.

1. Ce résultat permet de démontrer des résultats portants sur des suites définies par des récurrences d'ordre deux, c'est-à-dire liant u_n, u_{n+1} et u_{n+2}.
2. Ce résultat est aussi utilisé pour des suites dont les termes d'ordres pairs et impairs sont différents.

Exercice 324. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = u_2 = 1$ et $u_{n+2} = -3u_{n+1} - 2u_n$. Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-2)^n - 3 \times (-1)^n$.

Exercice 325. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 4$ et $u_{n+2} = \frac{5}{2}u_{n+1} - \frac{3}{2}u_n$. Conjecturez l'expression de u_n en fonction de n puis démontrez-la.

Exercice 326. travail libre 1 sur la suite de Fibonacci.

Exercice 327. Montrez que la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{3}$, $u_1 = 3$ et, pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n}$ est bien définie et périodique.

IV Récurrence forte.

Théorème 11. Soit $\mathscr{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n. Si les deux assertions suivantes sont vraies

(i) $\mathscr{P}(0)$ est vraie,

(ii) quel que soit $n \in \mathbb{N}$, si pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vrai alors, $\mathscr{P}(n+1)$ est aussi vraie,

alors les assertions $\mathscr{P}(n)$ sont vraies pour tous les entiers naturels n.

V Exercices.

Exercice 328. Montrer que les propositions suivantes sont vraies pour tout entier naturel n.

a) $2^{n+4} + 3^{3n+2}$ est divisible par 5.

b) $3^{6n+2} - 2$ est divisible par 7.

c) $n^3 - n$ est divisible par 3.

d) $4^n - 1 - 3n$ est divisible par 9.

e) $7 \times 3^{5n} + 4$ est divisible par 11.

Exercice 329. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3$. Démontrez, pour tout entier naturel n, que : $u_n = 5\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$.

Exercice 330. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 5$ et, pour $n \geqslant 2$: $u_n = 2u_{n-1} - n$. Démontrez, pour tout entier naturel non nul n, que : $u_n = 2(2^{n-1} + 1) + n$.

Exercice 331. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 3u_n + n + 1$. Démontrez, pour tout entier naturel n, que : $u_n = \frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2}$.

Exercice 332. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = \frac{1}{4}$ et $u_{n+1} = 5u_n - 1$. Calculez les trois premiers termes de la suite (u_n). Conjecturez son expression explicite. Démontrez la.

Exercice 333. On définit par récurrence la *factorielle* d'un entier naturel n et que l'on note $n!$ de la façon suivante : $0! = 1$ et $(n+1)! = n! \times (n+1)$. Démontrez que pour tout entier n supérieur ou égale à 1, $n! = 1 \times \cdots \times n$.

Exercice 334. Montrez par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = -2$ est croissante.

Exercice 335. Montrez par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 2020$ est décroissante.

Exercice 336. Montrez par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = \dfrac{2}{3 - u_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1{,}8$ est bornée par 1 et 2 et décroissante.

Exercice 337. On considère la proposition suivante : $\mathscr{P}(n)$: « 9 divise $10^n + 1$ ».

1. Démontrez, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que : si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
2. Qu'en est-il de $\mathscr{P}(0)$, $\mathscr{P}(1)$, $\mathscr{P}(2)$ et $\mathscr{P}(3)$? Que semble-t-il légitime de conjecturer ?
3. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: 9 divise $10^n - 1$.
4. Déduisez-en à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathscr{P}(n)$ est fausse.

Exercice 338. Montrez que : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ pour tout entier naturel n.

Exercice 339. On considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par : $t_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $t_{n+1} = t_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. La proposition : « pour tout entier naturel n, $t_n = \frac{n}{n+1}$ » est-elle vraie ou fausse ?

Exercice 340. Soit I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. Montrez que, si la fonction f vérifie la propriété : $\mathscr{P}$: « pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$ », alors on peut définir sur $\mathbb{N}$ la suite numérique (u_n) de la façon suivante : $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$ De plus, la suite numérique (u_n) vérifie la propriété : « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.

Exercice 341. Soient $f : I \to I$ une fonction une fonction croissante, $u_0 \in I$ et (u_n) la suite définie par pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrez que, si $u_0 \geqslant u_1$, alors (u_n) est décroissante.

Exercice 342. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} k$. Considérons la propriété $\mathscr{P}(n)$: $S_n = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)^2$. Démontrez que cette propriété est héréditaire mais qu'elle n'est pas vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 343. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par : $u_n = \frac{n^3 - n}{3}$.

1. Calculez les cinq premiers termes de la suite.
2. Donnez l'expression de $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n.
3. Étudiez la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrez que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, u_n est un entier.

Exercice 344. *Bac 2024.* On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = 2xe^{-x}$. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0;1]$.

1. Résoudre sur l'intervalle $[0;1]$ l'équation $f(x) = x$.
2. (a) *Nécessite la fonction logarithme népérien.* Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;1]$, $f'(x) = 2(1-x)e^{-x}$.
   (b) Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel, $0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est croissante et bornée.

Exercice 345. *BAC 2024.* On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $g(x) = 2x - x^2$.

1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$ et préciser les valeurs de $g(0)$ et de $g(1)$.

On considère la suite (u_n) définie par $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & g(u_n) \end{array}\right.$ pour tout entier naturel n.

2. Calculer u_1 et u_2.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et bornée.

VI Corrections.

Exercice 323.

a) $u_0 = 1 \geqslant 0{,}8$. $f : x \mapsto 0{,}5x + 0{,}4$ est une fonction affine croissante donc, si $p_n \geqslant 0{,}8$ alors $f(p_n) \geqslant f(0{,}8) = 0{,}5 \times 0{,}8 + 0{,}4 = 0{,}8$.

b) $2 \times 0{,}9^0 - 3 = -1 = u_0$. $f : x \mapsto 0{,}9x - 0{,}3$. Si $u_n = 2 \times 0{,}9^n - 3$ alors $f(u_n) = f(2 \times 0{,}9^n - 3) = 0{,}9 \times (2 \times 0{,}9^n - 3) - 0{,}3 = 2 \times 0{,}9^{n+1} - 3$.

c) f est croissante donc si $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ alors $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(\alpha) = \alpha$.

d) $13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^1 = 3 = u_1$. Notons $f : x \mapsto 0{,}9x + 1{,}3$. Si $u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^n$ alors $f(u_n) = f\left(13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^n\right) = 13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^{n+1}$.

e) $v_0 = 0{,}1$ et $v_1 = 0{,}16 - 0{,}016 = 0{,}094$ donc $0 \leqslant v_0 \leqslant v_1 \leqslant \frac{1}{2}$. $f(x) = 1{,}6x - 1{,}6x^2 = -1{,}6\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1{,}6}{4} = -1{,}6\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1{,}6}{4}$ donc f est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Si $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$ alors par croissance de f : $f(0) \leqslant f(v_n) \leqslant f(v_{n+1}) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$. On peut conclure avec $f(0) = 0$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}4 \leqslant \frac{1}{2}$.

f) $0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}2^{1-1} = 1 = p_1 =$. $f : x \mapsto 0{,}2x + 0{,}6$. Si $p_{n+1} = f(p_n) = f(0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}2^{n-1}) = 0{,}2 \times (0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}2^{n-1}) + 0{,}6$.

g) $v_0 = 6 \times 10^{21}$ et $v_1 = 0{,}995 \times (6 \times 10^{21}) + 1{,}5 \times 10^{19} = 5{,}985 \times 10^{21}$ donc $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$. $f : x \mapsto 0{,}996x + 1{,}5 \times 10^{19}$ est une fonction affine strictement croissante donc, si $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$, alors $f(0) \leqslant f(v_{n+1}) \leqslant f(v_n)$.

h) $u_0 = 5$ et $u_1 = \frac{1}{2}\left(5 + \frac{11}{5}\right) = \frac{18}{5}$ donc $u_0 \geqslant u_1 \geqslant \sqrt{11}$ car $3 \leqslant \sqrt{11} \leqslant \frac{7}{2}$. $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{11}{x}\right)$ est croissante sur $[\sqrt{11}, +\infty[$ par étude de la dérivée. Si $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant 0$ alors $f(u_n) \geqslant f(u_{n+1}) \geqslant f(\sqrt{11}) = \frac{1}{2}\frac{22}{\sqrt{11}} = \sqrt{11}$.

i) $a_0 = 1700$ et $a_1 = 1575$ donc $1200 \leqslant a_1 \leqslant a_0 \leqslant 1700$. $f : x \mapsto 0{,}75x + 300$ est une fonction affine strictement croissant donc si $1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1700$ alors $f(1200) \leqslant f(a_{n+1}) \leqslant f(a_n) \leqslant f(1700)$ et on conclue avec $f(1200) = 1200$ et $f(1700) = 1575$.

j) $u_0 = 8 > 2$. $f : x \mapsto \frac{6x+2}{x+5}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ par étude du signe de la dérivée. Si $u_n > 2$ alors $f(u_n) > f(2) = 2$.

k) $u_0 = 3 \geqslant 0 + 1$. Si $u_n \geqslant n = 1 + 1$ alors $5u_n \geqslant 5(n+1)$, $5u_n - 4n - 3 \geqslant 5n + 5 - 4n + 3 = n + 1$.

l) $u_0 = 0$ et $u_1 = \frac{-0-4}{0+3} = -\frac{4}{3}$ pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{-u_n-4}{u_n+3}$. $f : x \mapsto \frac{-x-4}{x+3}$ est strictement croissante sur $]-3, +\infty[$ par étude du signe de la dérivée. Si $-2 < u_{n+1} \leqslant u_n$.

m) $\frac{1}{\mathrm{e}^1} = u_1$ Si $u_n = \frac{n}{\mathrm{e}^n}$ alors $\frac{1}{\mathrm{e}}\left(1 + \frac{1}{n}\right)u_n = \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{n}{\mathrm{e}^n} = \frac{n+1}{\mathrm{e}^{n+1}}$.

n) $f : x \mapsto 2x(1-x)$ est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ du fait de la forme canonique du trinôme. $u_0 = 0{,}3$ et $u_1 = 0{,}42$. Si $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$ alors $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f(0) = 0$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

o) $u_0 = 0 \geqslant 2 \times 0$. Si $u_n \geqslant 2n$ alors $5u_n \geqslant 10n$ puis $5u_n - 8n + 6 \geqslant 10n - 8n + 6 \geqslant 2n + 2$.

Exercice 324. $u_1 = (-2)^1 - 3 \times (-1^n) = 1$ et $u_2 = (-2)^2 - 3 \times (-1)^2 = 1$.

Supposons $u_n = (-2)^n - 3 \times (-1)^n$ et $u_{n+1} = (-2)^{n+1} - 3 \times (-1)^{n+1}$. $u_{n+2} = -3((-2)^{n+1} - 3 \times (-1)^{n+1}) - 2((-2)^n - 3 \times (-1)^n) = (-2)^{n+2} - 3 \times (-1)^{n+2}$.

Exercice 325. $u_2 = \frac{5}{2} \times 4 - \frac{3}{2} \times 4 = 4$. La suite semble constante égale à 4. $u_{n+2} = \frac{5}{2}4 - \frac{3}{2}4 = 4$.

Exercice 326. Des éléments de correction.

Exercice 327. $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$. Si $u_{n-1} > 0$ et $u_n > 0$ alors $u_{n+1} = \frac{u_{n-1}}{u_n} > 0$. La suite est bien définie.

Exercice 328.

1.

$$\begin{aligned} 2^{(n+1)+4} + 3^{3(n+1)+2} &= 2^{n+5} + 3^{3n+5} \\ &= 2 \times 2^{n+4} + 3^{3n+5} \end{aligned}$$

Astuce :

$$\begin{aligned} 2^{(n+1)+4} + 3^{3(n+1)+2} &= 2 \times 2^{n+4} + 2 \times 3^{3n+2} - 2 \times 3^{3n+2} + 3^{3n+5} \\ &= 2\left(2^{n+4}3^{3n+2}\right) - 2 \times 3^{3n+2} + 3^3 \times 3^{3n+2} \\ &= 2\left(2^{n+4}3^{3n+2}\right) + \left(-2 + 3^3\right) \times 3^{3n+2} \\ &= 2\left(2^{n+4}3^{3n+2}\right) + 25 \times 3^{3n+2} \end{aligned}$$

25 est divisible par 5 et, d'après l'hypothèse de récurrence $2^{n+4}3^{3n+2}$ est divisible par 5 donc $2^{(n+1)+4} + 3^{3(n+1)+2}$ est divisible par 5.

2.

$$\begin{aligned} 3^{6(n+1)+2} - 2 &= 3^6 \times 3^{6n+2} - 2 \\ &= 3^6 \times (3^{6n+1} - 2) + 3^6 \times 2 - 2 \\ &= 3^6 \times (3^{6n+1} - 2) + 3^6 \times 2 - 2 \\ &= 3^6 \times (3^{6n+1} - 2) + 7 \times 208 \end{aligned}$$

3. Version brève : $(n-1)n(n+1)$ est le produit de trois entiers consécutifs et l'un de ces facteurs est forcément multiple de 3.

$$\begin{aligned} (n+1)^3 - (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 \\ &= n^3 - n + 3(n^2 - n) \end{aligned}$$

Or $3(n^2 - n)$ est divisible par 3 et, d'après l'hypothèse de récurrence, $n^3 - n$ est divisible par 3 donc $(n+1)^3 - (n+1)$ est divisible par 3.

4.

$$\begin{aligned} 4^{n+1} - 1 - 3(n+1) &= 4 \times 4^n - 1 - 3(n+1) \\ &= 4 \times (4^n - 1 - 3n) + 4 + 12n - 1 - 3(n+1) \\ &= 4 \times (4^n - 1 - 3n) + 9n \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}7\times 3^{5(n+1)}+4 &= 7\times 3^5\times 3^{5n}+4\\ &= 3^5\times(7\times 3^{5n}+4)-3^5\times 4+4\\ &= 3^5\times(7\times 3^{5n}+4)-968\\ &= 3^5\times(7\times 3^{5n}+4)-88\times 11\end{aligned}$$

Exercice 329. Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$u_{n+1}=\frac{2}{5}u_n+3 \quad (1).$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$u_n=5\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right),$$

donc, en remplaçant u_n dans l'égalité (1) on obtient :

$$u_{n+1}=\frac{2}{5}\left[5\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)\right]+3$$

À ce stade nous avons obtenu une formule explicite de u_{n+1}. Mais la présentation n'est pas tout à fait celle désirée. Modifions-la.

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= 2-5\times\frac{2}{5}\times\left(\frac{2}{5}\right)^n+3\\ &= 5-5\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\\ &= 5\times 1-5\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\\ &= 5\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)\end{aligned}$$

Exercice 330. Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$u_{n+1}=2u_n-(n+1) \quad (1).$$

Cette formule de récurrence a été obtenue en remplaçant n pa $n+1$ dans la formule de l'énoncé : pas de difficulté puisque cette formule est vraie pour tout $n\geqslant 1$.

Or, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$u_n=2\left(2^{n-1}+1\right)+n,$$

donc, en remplaçant u_n dans l'égalité (1) on obtient :

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= 2\left[\left(2^{n-1}+1\right)+n\right]-(n+1)\\ &= 2\times 2\times 2^{n-1}+4+2n-n-1\\ &= 2\times 2^n+2+n\\ &= 2(2^n+1)+n\end{aligned}$$

Exercice 331. Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: $u_{n+1}=2u_n+n+1 \quad (1)$.

Or, d'après l'hypothèse de récurrence : $u_n = \frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2}$, donc, en remplaçant u_n dans l'égalité (1) on obtient :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= 3\left[\frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2}\right] + n + 1 \\
&= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{9}{4} - \frac{3n}{2} + n + 1 \\
&= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4} - \frac{6}{4} - \frac{3n}{2} + n + 1 \\
&= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4} - \frac{3}{2} - \frac{3n}{2} + \frac{2n}{2} + \frac{2}{2} \\
&= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4} + \frac{-3 - 3n + 2n + 2}{2} \\
&= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4} + \frac{-n - 1}{2} \\
&= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4} - \frac{n+1}{2}
\end{aligned}$$

Exercice 332.

* $u_0 = u_1 = u_2 = \frac{1}{4}$.
* (u_n) semble être constante égale à $\frac{1}{4}$.
* Démonstration par récurrence. $u_{n+1} = 5u_n - 1$. D'après l'hypothèse de récurrence : $u_{n+1} = 5 \times \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{4}$.

Exercice 333. $1! = 1$. $(n+1)! = n! \times (n+1) = 1 \times \cdots \times n \times (n+1) = 1 \times \cdots \times (n+1)$.

Exercice 334. $u_0 = -2 \leqslant u_1 = \frac{1}{2} \times (-2) + 1 = 0$. Si $u_n \leqslant u_{n+1}$ alors, $x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$ étant croissante, $\frac{1}{2}u_n + 1 \leqslant \frac{1}{2}u_{n+1} + 1$.

Exercice 335. $u_0 = 2020 \geqslant \sqrt{45^2} = 2025 \geqslant \sqrt{2020} = u_1$. Si $u_n \geqslant u_{n+1}$ alors, $x \mapsto \sqrt{x}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+$, $\sqrt{u_n} \geqslant \sqrt{u_{n+1}}$.

Exercice 336. $u_1 = \frac{2}{3-1,8} = \frac{5}{3}$ donc $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0$. Si $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 2$ alors, $x \mapsto \frac{2}{3-x}$ étant croissante sur $]-\infty,3[$, $\frac{2}{3-1} \leqslant \frac{2}{3-u_n+1} \leqslant \frac{2}{3-u_n} \leqslant \frac{2}{3-2}$.

Exercice 337.

1. $10^{n+1} + 1 = 10 \times (10^n + 1) - 10 + 1 = 10 \times (10^n + 1) - 9$.
2. $10^0 + 1 = 2$, $10^1 + 1 = 11$, $10^2 + 1 = 101$ et $10^3 + 1 = 1001$.
3. $10^{n+1} - 1 = 10(10^n - 1) + 10 - 1 = 10(10^n - 1) + 9$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Démontrons en raisonnant par l'absurde que $\mathscr{P}(n)$ est fausse.
   Supposons que $10^n + 1$ est divisible par 9. Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $10^n + 1 = 9k$.
   D'autre part, d'après les questions précédentes $10^n - 1$ es divisible par 9 donc il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $10^n - 1 = 9p$.
   On en déduit successivement :
   $$\begin{aligned} 10^n + 1 - (10^n - 1) &= 9k - 9p \\ 2 &= 9(k - p) \end{aligned}$$
   Donc 2 est divisible par 9 ce qui est absurde car : $0 < 2 < 9$.

   Nous avons démontré par l'absurde que 10^+1 n'est pas divisible par 9, et ce, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 338.

* Quelques éléments pour l'hérédité.
  $\mathscr{P}(n+1)$ est une égalité, donc de la forme $A = B$. Pour la démontrer nous transformer l'écriture de A et de B en montrant $A = C$ et $B = C$ pour conclure $A = B$.
  D'une part : $\sum_{i=0}^{n+1} i^2 = (n+1)^2 + \sum_{i=0}^{n} i^2 = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{6(n+1)^2 + n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{6(n^2+2n+1)+(n^2+n)(2n+1)}{6} = \frac{6n^2+12n+6+2n^3+n^2+2n^2+n}{6} = \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}$,

d'autre part : $\frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n^2+3n+2)(2n+3)}{6} = \frac{2n^3+3n^2+6n^2+9n+4n+6}{6} = \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}$,

donc, par transitivité, $(n+1)^2 + \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$.

Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

* Pour démontrer l'hérédité il faut établir une égalité $A = B$. Nous allons partir de B et en développant astucieusement faire apparaître A.

$\left[\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right]^2 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 = \left[\frac{(n+1)n+(n+1)2}{2}\right]^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)\right]^2$.

En développant avec une identité remarquable : $\left[\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right]^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + n(n+1)(n+1) + (n+1)^2$.

D'après l'hypothèse de récurrence : $\left[\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right]^2 = n(n+1)^2 + 1 \times (n+1)^2 + \sum_{i=0}^{n} i^3$.

En factorisant : $\left[\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right]^2 = (n+1)(n+1)^2 + \sum_{i=0}^{n} i^3 = (n+1)^3 + \sum_{i=0}^{n} i^3 = \sum_{i=0}^{n+1} i^3$.

Exercice 339. $t_0 = \frac{0}{0+1}$. Si $t_n = \frac{n}{n+1}$ alors $t_{n+1} = t_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+1)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$.

Exercice 340. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$ et donc $f(u_n)$ existe.

Exercice 341. On démontre par récurrence que $u_n \geqslant u_{n+1}$.

Exercice 342. D'une part $S_n + n + 1 = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + n + 1 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{8} + n + 1 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + \frac{9}{8} = \frac{1}{2}\left(n^2 + 3n + \frac{9}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(n + \frac{3}{2}\right)^2 = S_{n+1}$.

$S_0 \neq \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\right)^2$.

Exercice 343.

1. $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$, $u_3 = 8$, $u_4 = 20$.
2. $u_{n+1} - u_n = n + 1$.
3. $u_{n+1} - u_n = n + 1 > 0$ donc suite strictement croissante.
4. Voir ci-dessus.

Exercice 344.

1. $2xe^{-x} = x \Leftrightarrow x(2e^{-x} - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \ln(2)$.
2. (a) $f = uv$ avec $u(x) = 2x$ et $v(x) = e^{-x}$.
   (b) $e^{-x} > 0$ et $1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$ donc

x	0		1
f'		$+$	0
f	0	$\nearrow$	e^{-1}

3. (a) $u_1 = 2 \times 0{,}1e^{-0{,}1} = \frac{2}{e^{0{,}1}} \times 0{,}1 > 1 = u_0$. Si $0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$ alors $f(0) \leqslant f(u_n) < f(u_{n+1}) \leqslant f(1)$ car f est strictement croissante sur $[0;1]$ et on conclue avec $f(0) = 0$ et $f(1) = e^{-1} \leqslant 1$.
   (b) Immédiat.

Exercice 345. .

1. $g(x) = -(x^2 - 2x + 1) + 1 = -(x-1)^2 + 1$ donc g est strictement croissante sur $[0;1]$. $g(0) = 0$ et de $g(1) = 1$.
2. $u_1 = \frac{3}{4}$ et $u_2 = \frac{3}{2} - \frac{9}{16} = \frac{15}{16}$.
3. $0 < u_0 < u_1 < 1$. Si $0 < u_n < u_{n+1} < 1$, g étant strictement croissante sur $[0;1]$, alors $f(0) < f(u_n) < f(u_{n+1}) < f(1)$.
4. Immédiat.